KAP. 1.3

$\boxed{1.9}$ BERÄKNA:

e) $\sqrt{x^2} = |x|$

OBS! ROTUTDRAGNING RESULTERAR I ETT ICKE-NEGATIVT TAL

SÅ $\sqrt{x^2} \neq x$. TA T.EX. $x=-1$ FÖR ATT FÅ $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$!

f) $\sqrt{(-x)^2} = |x|$

SAMMA RESONEMANG SOM OVAN. $\sqrt{(-x)^2} \neq -x$ I ALLMÄNHET!

TA T.EX. $x=1$ FÖR ATT FÅ $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$!

$\boxed{1.10}$ LÖS EKVATIONEN:

a) $|x| = 4$

TVÅ FALL:

$x < 0$: $|x| = -x = 4 \Rightarrow x = -4$

$x \geq 0$: $|x| = +x = 4 \Rightarrow x = 4$

SVAR: $x = \pm 4$

e) $|2x+1| = 1$

TVÅ FALL:

$2x+1 < 0$: $|2x+1| = -(2x+1) = 1 \Rightarrow 2x+1 = -1$

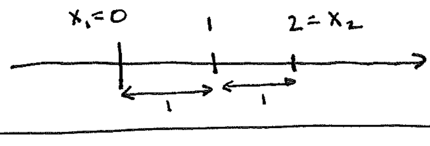
$\Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

$2x+1 \geq 0$: $|2x+1| = 2x+1 = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

SVAR: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$

f) $|1-x| = 1$

KAN LÖSAS SOM OVAN. MEN $|1-x|$ KAN TOLKAS GEOMETRISKT SOM AVSTÅNDET MELLAN 1 OCH X. $|1-x|=1$ BETYDER ALLTSÅ ATT AVSTÅNDET MELLAN 1 OCH X SKA VARA 1. DETTA GÄLLER FÖR $x_1 = 0$ OCH $x_2 = 2$.



$\boxed{1.19}$ LÖS EKVATIONEN

a) $|x-1|+|x-2|=2$

BESTÄM FÖRST NÄR UTTRYCKEN INNANFÖR ABSOLUTBELOPPEN ÄR POSITIVA EL. NEGATIVA.

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

VI SER ATT DET BLIR TRE OLIKA FALL:

1) $x \leq 1$:

$$|x-1|+|x-2| = -(x-1)-(x-2) = -2x+3$$

$$-2x+3=2 \implies 2x=1 \implies x=\frac{1}{2}$$

2) $1<x<2$:

$$|x-1|+|x-2| = x-1-(x-2)=1$$

INGEN LÖSNING TILL EKV. FÖR x I DETTA INTERVALL.

3) $x \geq 2$:

$$|x-1|+|x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$$

$$2x-3=2 \implies 2x=5 \implies x=\frac{5}{2}$$

SVAR: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{5}{2}$

KAP. 1.4

$\boxed{1.30}$ POLYNOMDIVIDERA:

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x-3 \\
\hline
x^3+x+1 & x^5+3x^4-2x^3+2x-1 \\
 & -(x^5+x^3+x^2) \\
\hline
 & 3x^4-3x^3-x^2+2x-1 \\
 & -(3x^4+3x^2+3x) \\
\hline
 & -3x^3-4x^2-x-1 \\
 & -(-3x^3-3x-3) \\
\hline
 & -4x^2+2x+2
\end{array}
$$

SVAR: $\begin{cases} \text{KVOT: } & x^2+3x-3 \\ \text{REST: } & -4x^2+2x+2 \end{cases}$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\
\hline
x-1 & x^6-1 \\
 & -(x^6-x^5) \\
\hline
 & x^5-1 \\
 & -(x^5-x^4) \\
\hline
 & x^4-1 \\
 & -(x^4-x^3) \\
\hline
 & x^3-1 \\
 & -(x^3-x^2) \\
\hline
 & x^2-1 \\
 & -(x^2-x) \\
\hline
 & x-1 \\
 & -(x-1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

SVAR: $\begin{cases} \text{KVOT: } & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ \text{REST: } & 0 \end{cases}$

$\boxed{1.31}$ FAKTORISERA:

c) $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

d) $x^2 - 3x + 2$

SÖK EN ROT. PRÖVA $x = 1$: $1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 0$ OK

D.V.S $x-1$ ÄR EN FAKTOR. POLYNOMDIVIDERA:

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x-1 & x^2-3x+2 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & -2x+2 \\ & -(-2x+2) \\ \hline & 0 \end{array}$$

SVAR: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$

$\boxed{1.34}$ FAKTORISERA POLYNOMET $p(x) = x^3 - 2x - 4$

GISSA LÖSNING MED HJÄLP AV SATS 4 (S.54). OM $p(\alpha) = 0$, $\alpha = \frac{p}{q}$ SÅ MÅSTE

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \quad q = \pm 1$$

GENOM ATT PRÖVA DESSA MÖJLIGHETER SER VI ATT

$$p(2) = 2^3 - 2\cdot 2 - 4 = 8 - 8 = 0$$

D.V.S $x-2$ ÄR EN FAKTOR.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+2 \\ \hline x-2 & x^3-2x-4 \\ & -(x^3-2x^2) \\ \hline & 2x^2-2x-4 \\ & -(2x^2-4x) \\ \hline & 2x-4 \\ & -(2x-4) \\ \hline & 0 \end{array} \implies p(x) = (x-2)(x^2+2x+2)$$

ÅTERSTÅR ATT FAKTORISERA x^2+2x+2. DETTA KAN VI GÖRA GENOM ATT LÖSA

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \overset{\text{(KVADRATKOMPLETTERA)}}{\implies} (x^2 + 2x + 1) - 1 + 2 = 0 \implies (x+1)^2 + 1 = 0$$

$\implies (x+1)^2 = -1$ SAKNAR REELLA RÖTTER, TY $(x+1)^2 \geq 0$!

D.V.S VI KAN INTE FAKTORISERA x^2+2x+2 I REELLA FAKTORER.

SVAR: $p(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x+2)$

KAP. 1.4

$\boxed{1.35}$ BERÄKNA (GEOMETRISK) SUMMA:

a) $$1+2+4+8+16+32 = 2^0+2^1+\dots+2^5 = \sum_{k=0}^{5} 2^k = \frac{2^6-1}{2-1} = 63$$

c) $$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{128} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{256}\right)$$
$$= 2\cdot\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right)$$
$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$
$$= 2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 4\cdot\frac{511}{512}$$
$$= \frac{511}{128}$$

e) $$1-x+x^2-x^3+\dots-x^9 = (-x)^0+(-x)^1+(-x)^2+(-x)^3+\dots+(-x)^9$$
$$= \sum_{k=0}^{9}(-x)^k$$
$$= \frac{1-(-x)^{10}}{1-(-x)}$$
$$= \frac{1-x^{10}}{1+x}$$

$\boxed{1.44}$ VAD ÄR KOEFFICIENTEN FÖR x^{13} I $(x+1)^{15}$?

ANVÄND BINOMIALSATSEN

$$(x+1)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^k = \binom{15}{0}\cdot 1 + \binom{15}{1}\cdot x + \dots + \binom{15}{13}\cdot x^{13} + \binom{15}{14}\cdot x^{14} + \binom{15}{15}\cdot x^{15}$$

VI SER ATT DEN SÖKTA KOEFFICIENTEN ÄR

$$\binom{15}{13} = \frac{15!}{13!\,(15-13)!} = \frac{15\cdot 14}{2!} = 15\cdot 7 = 105$$

SVAR: 105

$\boxed{1.47}$ VAD ÄR HÖGSTAGRADSTERMEN I $(x^3-2)^{16} - (x^4+3)^{12}$?

ANVÄND BINOMIALSATSEN:

(1) $$(x^3-2)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \cdot (x^3)^k \cdot (-2)^{16-k}$$

(2) $$(x^4+3)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^4)^k \cdot (3)^{12-k}$$

HÖGSTAGRADSTERMERNA FÖR (1) OCH (2) ÄR

$$\binom{16}{16} \cdot (x^3)^{16} \cdot (-2)^0 = x^{48}$$

$$\binom{12}{12} \cdot (x^4)^{12} \cdot (3)^0 = x^{48}$$

DESSA TAR UT VARANDRA (VI ÄR INTRESSERADE AV "(1) − (2)"), SÅ VI RÄKNAR UT NÄST-HÖGSTA ORDNINGENS TERMER:

$$\binom{16}{15} \cdot (x^3)^{15} \cdot (-2)^{16-15} = 16 \cdot x^{45} \cdot (-2)^1 = -32 \cdot x^{45}$$ ← HÖGST!

$$\binom{12}{11} \cdot (x^4)^{11} \cdot 3^{12-11} = 12 \cdot x^{44} \cdot 3 = 48\, x^{44}$$

SVAR: $-32x^{45}$

$\boxed{1.61}$ FÖRENKLA:

a) $3^x + 3^{x+1} = 3^x + 3^x \cdot 3 = 3^x \cdot (1+3) = \underline{\underline{4 \cdot 3^x}}$

d) $\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^x \cdot e} = \frac{1}{e^x} \cdot \left(1 + \frac{1}{e}\right)$

$= \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e+1}{e} = \frac{1}{e^{x+1}} \cdot (e+1) \quad \left(= (1+e) \cdot e^{-(x+1)} \right)$

$\boxed{1.63}$ LÖS EKVATIONEN:

a)

$2^x \cdot 3^{x-2} = 4$

$2^x \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 4$

$(2 \cdot 3)^x = 4 \cdot 3^2$

$6^x = 36$

$x = 2$

SVAR: $x = 2$

b)

$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

$2^x \cdot 2^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ LÅT $y := 2^x$

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y-3)^2 - 3^2 + 8 = 0$

$(y-3)^2 = 1$

$y = 3 \pm 1$

OM $y = 2$ DÅ $x = 1$ $(2^1 = 2)$

OM $y = 4$ DÅ $x = 2$ $(2^2 = 4)$

SVAR: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$\boxed{1.72}$ LÖS EKVATIONEN

a) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$

$$\ln(x(x-1)) = \ln 6$$

$$x(x-1) = 6$$

$$x^2 - x = 6$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 6$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{24+1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Longrightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

EL.

$$x = -\frac{4}{2} = -2$$

OBS! ln ÄR EJ DEFINIERAD FÖR $x \leq 0$ SÅ $x=-2$ ÄR EJ EN GILTIG ROT.

SVAR: $x = 3$

c) $2\ln(x-4) = \ln x + \ln 2$

$$\ln(x-4)^2 = \ln 2x$$

$$(x-4)^2 = 2x$$

LÅT $y := x-4$, DÅ $x = y+4$ OCH EKV. BLIR

$$y^2 = 2(y+4)$$

$$y^2 - 2y = 8$$

$$(y-1)^2 - 1 = 8$$

$$y = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \Longrightarrow y = 4 \text{ EL. } y = -2$$

OM $y=4$ DÅ $x = 4+4 = 8$. OM $y=-2$ DÅ $x = -2+4 = 2$.

MEN OM $x=2$ SÅ $x-4 = 2-4 = -2$ SÅ $\ln(x-4)$ I EKV. ÄR EJ DEFINIERAD. D.V.S. $x=2$ ÄR EN FALSK ROT.

SVAR: $x = 8$