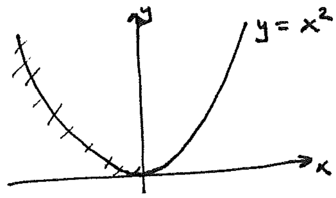
$\boxed{1.86}$

a) $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$. BESTÄM INVERS

① AVGÖR OM $f$ ÄR INVERTERBAR, T.EX. RITA GRAF:




OBS: EJ INVERTERBAR FÖR ALLA $x$
DOCK INV. BAR, OM VI RESTRINGERAR
TILL $x \geq 0$ SOM I UPPGIFT
(HORISONTELLA LINJER SKÄR GRAF
I HÖGST EN PUNKT [OM VI KRÄVER
$x \geq 0$])

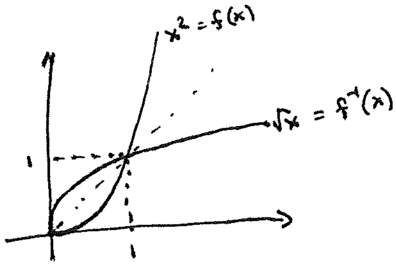
② HITTA INVERS GENOM ATT LÖSA UT $x$ FRÅN $y = f(x)$:

$$y = f(x) = x^2 \implies x = \pm\sqrt{y}$$

OBS! $x \geq 0$ ENLIGT DEFINITION AV $f$ SÅ DEN NEGATIVA ROTEN
ÄR OGILTIG

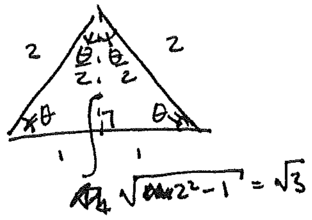
SVAR: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

(KONTROLL: $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$, TY $x \geq 0$. OK!)



KAP. 1.9

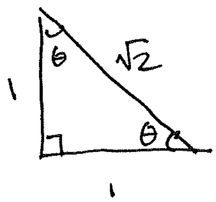
$\boxed{1.94}$



$3\theta = \pi \iff \theta = \frac{\pi}{3} \quad (60^\circ)$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \end{aligned}}$$



$$2\theta + \frac{\pi}{2} = \pi$$

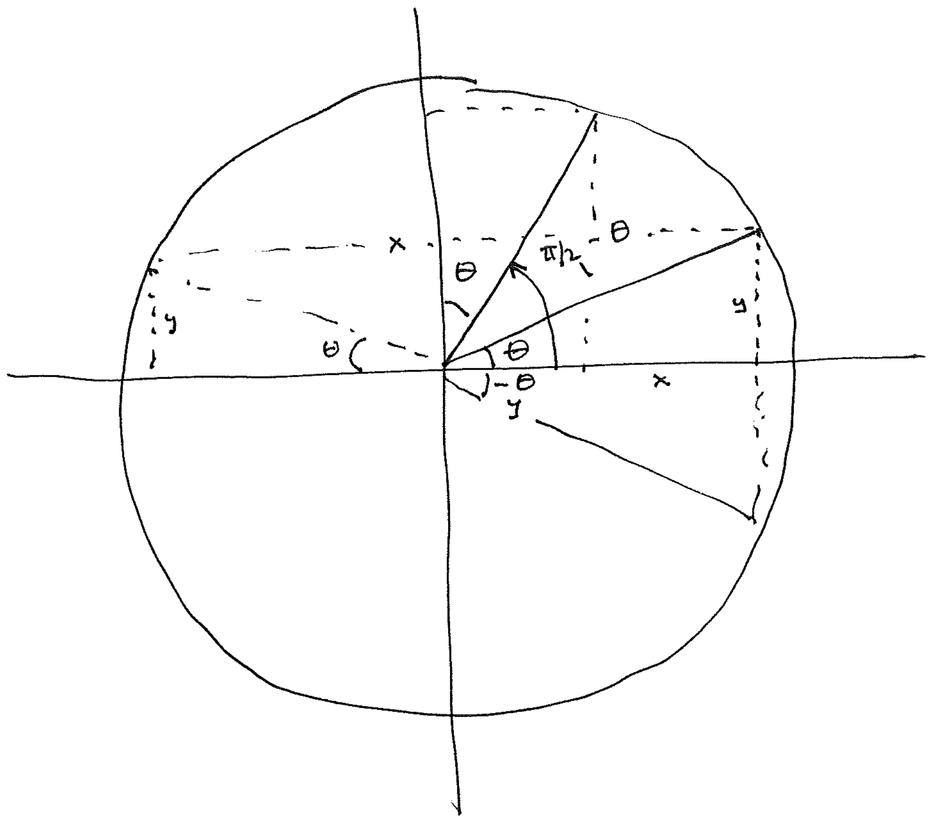
$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sin\frac{\pi}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}}$$

---

ENHETSCIRKELN : $x^2+y^2=1$




$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$y = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

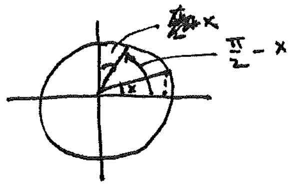
$\cos(-\theta) = x = \cos\theta$

$\sin(\pi-\theta) = y = \sin\theta$

$\boxed{1.101}$ LÖS EKVATIONEN $\cos 4x = \sin x$

SKRIV OM EKV. SÅ ATT VI BARA HAR COS, ELLER BARA SIN.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$




DETTA GER:

$$\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k & \text{(i)} \\ 4x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi k & \text{(ii)} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

i) $5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Longrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$

ii) $4x = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \Longrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$

SVAR: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$ EL. $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$ (DÄR $k \in \mathbb{Z}$).

---

ALTERNATIV LÖSNING:

ANVÄND $\cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 4x = x + 2\pi k & \text{(i)} \\ \frac{\pi}{2} - 4x = \pi - x + 2\pi k & \text{(ii)} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

i) $\frac{\pi}{2} - 4x = x + 2\pi k \Longrightarrow -5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Longrightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2\pi k}{5}$

ii) $\frac{\pi}{2} - 4x = \pi - x + 2\pi k \Longrightarrow -3x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi k}{3}$

DETTA GER SAMMA LÖSNINGAR SOM OVAN (TY $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ SÅ TECKNET FRAMFÖR $2\pi k/5$ OCH $2\pi k/3$ HAR INGEN BETYDELSE).

---

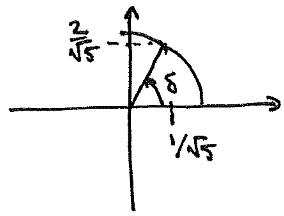
$\boxed{1.104}$ VISA ATT: $|\sin x + 2\cos x| \le \sqrt{5}$.

ANVÄND HJÄLPVINKELFORMELN:

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{1^2+2^2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{5} \cdot \left( \cos \delta \cdot \sin x + \sin \delta \cdot \cos x \right)$$

$$= \sqrt{5} \cdot \sin(\delta + x)$$




VI BEHÖVER INTE BESTÄMMA $\delta$ TY

NU FÅR VI ATT:

$$|\sin x + 2\cos x| = |\sqrt{5} \cdot \sin(x+\delta)| = \sqrt{5} \cdot |\sin(x+\delta)|$$

$$\le \sqrt{5} \cdot 1 \qquad (\text{OBS! } |\sin(x+\delta)| \le 1)$$

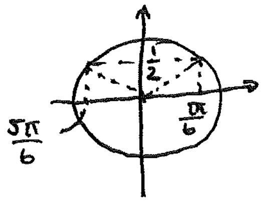
VILKET SKULLE VISAS.

$\boxed{1.115}$

a) LÖS $\sin x = \frac{1}{2}$

EN LÖSNING ÄR $\frac{\pi}{6}$, TY $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. OM VI BETRAKTAR ENHETSCIRKELN FÅR VI ÄVEN LÖSNINGEN $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

KOM IHÅG ATT sin ÄR $2\pi$-PERIODISK SÅ ALLA LÖSNINGAR GES AV:




SVAR: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ELLER $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

DÄR $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) $\arcsin\frac{1}{2} = ?$

SVARET GES AV DEN LÖSNING TILL (a) SOM LIGGER I INTERVALLET $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (DETTA ÄR VÄRDEMÄNGDEN ~~DEFINITIONSOMRÅDET~~ TILL arcsin).

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ GER $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6} < -\frac{\pi}{2}$, ...

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ GER $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6} < -\frac{\pi}{2}$, ...

VI SER ATT:

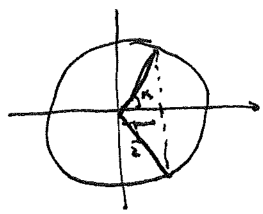
SVAR: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

---

$\boxed{1.116}$

a) LÖS $\cos x = \frac{1}{2}$

KOM IHÅG $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ OCH SÅLEDES FÅR VI



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

SVAR: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

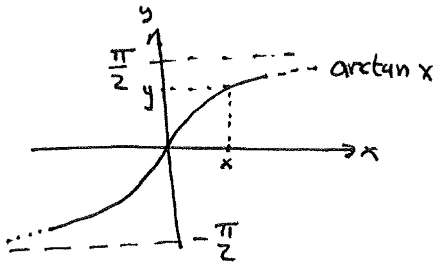
b) $\arccos\frac{1}{2} = ?$

SVARET GES AV DEN LÖSNING TILL (a) SOM LIGGER I INTERVALLET $[0, \pi]$ (VÄRDEMÄNGDEN TILL arccos), D.V.S:

SVAR: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{1.128}$ LÅT $y = \arctan x$, VISA ATT

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$




$y = \arctan x \implies \tan y = x, \quad x \in \mathbb{R}$ (SE FIG. →)

SÅLEDES (ENL. DEF. AV tan, OCH ANV. TRIG. ETTAN):

$$x^2 = \tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$$

$$x^2 \cdot \cos^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$(x^2 + 1)\cos^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

VILKET SKULLE VISAS.

$\boxed{2.3}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDEN

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

LÅT $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$. DÅ

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$ EXISTERAR EJ

DOCK GÄLLER $|g(x)| \leq 1$ SÅ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) \leq \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) \geq \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot(-1) = 0$$

D.V.S $0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0$ SÅ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ENLIGT SATS 4 (S.136).

SVAR: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x}$

LIKSOM I (a) SÅ ÄR TÄLJAREN ~~NÄMNAREN~~ BEGRÄNSAD OCH NÄMNAREN $\to \infty$, SÅ GRÄNSVÄRDET ÄR NOLL, MER PRECIST HAR VI

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{\cos x}{\ln x}\right| \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|\ln x|} = 0$$

VILKET GER:

SVAR: $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x} = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin x$

GRÄNSEN EXISTERAR EJ TY $f(x) = x$ VÄXER OBEGRÄNSAT OCH $g(x) = \sin x$ OSCILLERAR MELLAN 1 OCH $-1$ SÅ $f(x)\cdot g(x)$ ANTAR OBEGRÄNSAT STORA POSITIVA OCH NEGATIVA VÄRDEN DÅ $x$ VÄXER.

SVAR: GRÄNSVÄRDE EXISTERAR EJ.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\arctan x}$

OBS: $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ DÅ $x \to \infty$ OCH $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ FÖR $x > 0$ SÅ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\arctan x} > \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

SVAR: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\arctan x} = \infty$ (OEGENTLIGT GRÄNSVÄRDE S.135)

$\boxed{2.8}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

e) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$

OBS! VIKTIGT ATT $x > 0$, ANNARS ÄR $\ln x$ EJ DEFINIERAT!

LÅT $y = \ln x$, SÅ $x = e^y$, OCH $x \to 0^+ \Rightarrow y \to -\infty$:

$$(e) = \underbrace{\lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y}_{\text{STANDARDGRÄNSVÄRDE}} = \underline{\underline{0}}$$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x}$

LÅT $y = 3x$, SÅ $x = \frac{y}{3}$ OCH $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$:

$$(h) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{3}}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$\boxed{2.11}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \left(e^{1}\right)^{2} = \underline{\underline{e^{2}}}$$

(SATS 2 (7), S. 136)

g) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{2} \qquad \text{(OK TY } n>0!\text{)}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^{2} \qquad \text{(SATS 2(7), S. 136)}$$

$$= (1)^{2} = \underline{\underline{1}}$$

h) $$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

OBSERVERA ATT $2+\frac{1}{n} \geq 2$, SÅ $\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq 2^{n}$ VILKET VÄXER OBEGRÄNSAT DÅ $n\to\infty$. SÅLEDES

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}\right)^{n} \geq \lim_{n\to\infty} 2^{n} = \infty$$

DEN ENDA MÖJLIGHETEN ÄR ATT $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} = \infty$.

---

2.5 BESTÄM KONSTANTERNA $a, b$ SÅ ATT

$$\lim_{x \to 2} \frac{ax+b}{x^2-4} = 1$$

OBS! OM $x \to 2$ SÅ GÅR NÄMNAREN MOT 0 SÅ VI MÅSTE VÄLJA $a, b$ SÅ ATT TÄLJAREN OCKSÅ GÅR MOT 0 (ANNARS KAN INTE GRÄNSVÄRDET VARA ÄNDLIGT). D.V.S.

$$a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow -2a = +b \Rightarrow ax + b = ax - 2a = a(x-2)$$

EFTERSOM ATT $x^2 - 4 \to 0$ DÅ $x \to 2$ SÅ ÄR 2 EN ROT TILL $x^2-4=0$, SÅ VI KAN FAKTORISERA UT $(x-2)$. D.V.S.

$$x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2) \quad \text{(KONJUGATREGELN!)}$$

TILLSAMMANS FÅR VI

$$\lim_{x \to 2} \frac{ax+b}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{a}{x+2} = \frac{a}{4}$$

SÅ OM GRÄNSVÄRDET SKA BLI 1 SÅ MÅSTE VI HA

$$\frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4 \quad \text{OCH} \quad b = -2a = -8$$

SVAR: $a = 4$, $b = -8$

---

$\boxed{2.17}$ ÄR FUNKTIONEN KONTINUERLIG?

b)
$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{OM } x \neq 1 \\ 3, & \text{OM } x = 1 \end{cases}$$

VI SKA UNDERSÖKA OM $\lim_{x\to 1} h(x)$ EXISTERAR OCH ÄR 3.
FAKTORISERA TÄLJAREN (OBS! $2\cdot 1^2 - 1 - 1 = 0$, SÅ 1 ÄR EN ROT):

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x-1 & 2x^2-x-1 \\ & -(2x^2-2x) \\ \hline & x-1 \\ & -(x-1) \\ \hline & 0 \end{array} \implies 2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$$

SÅLEDES, OM $x \neq 1$:

$$\frac{2x^2-x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 2x+1 \longrightarrow 3, \quad \text{DÅ } x \to 1$$

VILKET VISAR BÅDE ATT $\lim_{x\to 1} h(x)$ EXISTERAR OCH ATT $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$, SÅ $h$ ÄR KONTINUERLIG I PUNKTEN $x=1$.

DET ÄR UPPENBART* ATT $h$ ÄR KONTINUERLIG I PUNKTER $x \neq 1$, SÅ $h$ ÄR KONTINUERLIG.

**SVAR: JA**

(*) BEVIS:

OBS! DET 4:ÄR ÄR SKRIVER MAN ALDRIG UT...

FUNKTIONERNA
$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -1, \quad f_3(x) = 2$$
ÄR KONTINUERLIGA, SÅLEDES ÄR
$$f_4(x) = f_3(x)\cdot f_1(x)\cdot f_1(x) + f_2(x)\cdot f_1(x) + f_2(x) \qquad (= 2x^2-x-1)$$
OCH
$$f_5(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (= x-1)$$
OCKSÅ KONTINUERLIGA; TY PRODUKTEN AV TVÅ KONT. FUNKTIONER ÄR KONT., SAMT SÅ ÄR SUMMAN AV TVÅ KONT. FUNKTIONER KONT.

SLUTLIGEN, OM $x \neq 1$ SÅ ÄR $f_5(x) \neq 0$, SÅ
$$\frac{f_4(x)}{f_5(x)} = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$$
ÄR KONTINUERLIG; TY KVOTEN AV TVÅ KONT. FNKT. ÄR KONT. OM NÄMNAREN $\neq 0$.