$\boxed{3.2}$ BERÄKNA DERIVATAN M.H.A. DEFINITIONEN

d) $f(x) = \ln x, \quad x > 0$

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \qquad \text{(EKV. (36) S.78)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \ln\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}\right] \qquad \text{(EKV. (37) S.78)}$$

$$= \ln\left[\lim_{h \to 0} \left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}\right] \qquad \text{(ln ÄR KONTINUERLIG, S.144)}$$

BETRAKTA DET "INRE" GRÄNSVÄRDET

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \left\{ y = \frac{x}{h} \right\} = \underbrace{\lim_{y \to \infty}}_{\text{OBS!}} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y/x}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{1/x}$$

$$= \left[\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{1/x} \qquad \text{(} x \mapsto a^{1/x} \text{ ÄR KONTINUERLIG, S.144)}$$

$$= \left[e\right]^{1/x} = e^{1/x} \qquad \text{(SATS 7, S.153)}$$

SÄTT IN I UTTRYCKET FÖR $f'(x)$

$$f'(x) = \ln\left[e^{1/x}\right] = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

SVAR: $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\boxed{3.7}$ BESTÄM EKV. FÖR NORMAL + TANGENT

$\boxed{D(\cos x) = -\sin x}$

a) $y = \cos 2x$ I PUNKTEN $x_0 = \pi/6$

LINJENS EKV. FÖR LINJE SOM SKÄR PUNKTEN (x_0, y_0) MED RIKTNINGSKOEFFICIENT k GES AV:

$$y = y_0 + k \cdot (x - x_0) \qquad \text{(EKV. (3) S. 181)}$$

I VÅRT FALL $y_0 = \cos(2x_0) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

LUTNINGEN TILL TANGENTEN GES AV DERIVATAN I x_0:

$$(*)\quad y' = -\sin(2x) \cdot (2x)' = -\sin(2x) \cdot 2 \qquad \text{(KEDJEREGELN)}$$

SE NEDAN

$$k = -2 \cdot \sin(2x_0) = -2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

LUTNINGEN TILL NORMALEN: $m = -\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

SVAR: $\begin{cases} \text{TANGENTEN: } & y = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \text{NORMALEN: } & y = \frac{1}{2} + \frac{x - \pi/6}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\boxed{D(\ln x) = \frac{1}{x},\ x > 0}$

b) $y = \ln x$ I PUNKTEN $x_0 = 2$

$y' = \frac{1}{x}$, $\quad k = \frac{1}{2}$, $\quad y_0 = \ln 2$, $\quad m = -\frac{1}{k} = -2$

SVAR: $\begin{cases} \text{TANGENTEN: } & y = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) \\ \text{NORMALEN: } & y = \ln 2 - 2(x - 2) \end{cases}$

DERIVATAN (*) KAN BERÄKNAS M.H.A. DEFINITIONEN SÅ HÄR:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(2(x+h)) - \cos 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2x \cdot \cos 2h - \sin 2x \cdot \sin 2h - \cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos 2x \cdot \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \cdot \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \cos 2x \cdot \frac{-2\sin^2 h}{h} - \sin 2x \cdot \frac{\sin 2h}{h}$$

$$= -2\cos 2x \cdot \left\{\lim_{h \to 0} \sin h\right\} \cdot \left\{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right\} - \sin 2x \cdot \left\{\lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{h}\right\}$$

$$= -2 \cdot \cos 2x \cdot 0 \cdot 1 - \sin 2x \cdot \left\{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t/2}\right\} = -\sin 2x \cdot 2$$

$\boxed{3.9}$ DERIVERA :

$$\boxed{\begin{aligned} D(e^x) &= e^x \\ D(\sin x) &= \cos x \end{aligned}}$$

a) $D\left(e^{2x} - \sin 3x\right) = D\left(e^{2x}\right) - D\left(\sin 3x\right)$

$= e^{2x} \cdot D(2x) - \cos 3x \cdot D(3x)$ (KEDJEREGELN)

$= e^{2x} \cdot 2 - \cos 3x \cdot 3$

$$\boxed{D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

b) $D\left(\ln x + \arctan x\right) = D\left(\ln x\right) + D\left(\arctan x\right)$

$= \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) $D\left(\arcsin 2x + (2x+1)^7\right) = D\left(\arcsin 2x\right) + D\left((2x+1)^7\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot D(2x) + 7\,(2x+1)^6 \cdot D(2x+1)$ (KEDJEREGELN)

$= \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} + 14 \cdot (2x+1)^6$

$$\boxed{D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1},}$$

e) $D(\sqrt{x}) = D\left(x^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3.10 DERIVERA:

a) $$D\left(e^{2x}\cdot\sin 3x\right) = D\left(e^{2x}\right)\cdot\sin 3x + e^{2x}\cdot D(\sin 3x)$$ (PRODUKTREGELN)

$$= e^{2x}\cdot D(2x)\cdot\sin 3x + e^{2x}\cdot\cos 3x\cdot D(3x)$$ (KEDJEREGELN)

$$= 2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x + 3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x$$

$$= e^{2x}\cdot\left(2\cdot\sin 3x + 3\cdot\cos 3x\right)$$

c) $$D\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{D(x)\cdot(x+1) - x\cdot D(x+1)}{(x+1)^2}$$ (KVOTREGELN)

$$= \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\boxed{3.13}$ DERIVERA :

a) $$D\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) = \frac{D\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$ (KEDJEREGELN)

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2} \cdot D\left(1+x^2\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$ (KEDJEREGELN)

$$= \frac{1 + x\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1 + x\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}}{x^2-\left(1+x^2\right)} \cdot \left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \sqrt{1+x^2} - \cancel{x} + \cancel{x} - x^2\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\boxed{3.14}$ DERIVERA:

a) $D(2^x) = D\left(e^{x \cdot \ln 2}\right) = e^{x \cdot \ln 2} \cdot D(x \cdot \ln 2)$ (KEDJEREGELN)

$= 2^x \cdot \ln 2$

d) $D(x^x) = D\left(e^{x \cdot \ln x}\right) = e^{x \cdot \ln x} \cdot D(x \cdot \ln x)$ (KEDJEREGELN)

$= x^x \cdot \left(\cancel{1}D(x) \cdot \ln x + x \cdot D(\ln x)\right)$ (PRODUKTREGELN)

$= x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$

$= x^x \cdot (\ln x + 1)$

$\boxed{3.17}$ DERIVERA: $$f(x) = \frac{e^{x^2}\cdot(\arcsin x)^2\cdot x\cdot\sqrt{\cos x}}{(\ln x)^6\cdot\sin^2 x}, \quad x > 0, \quad x \le 1$$

$\uparrow$ ln TERMEN! $\quad \uparrow$ arcsin TERMEN!

ALLA INGÅENDE TERMER ÄR POSITIVA SÅ VI KAN STUDERA

$F(x) := \log f(x)$:

$$F(x) = \log e^{x^2} + \log\left[(\arcsin x)^2\right] + \log x + \log\sqrt{\cos x} - \log\left[(\ln x)^6\right] - \log\sin^2 x$$

DENNA FUNKTION ÄR ENKLARE ATT DERIVERA. NÄR VI VÄL KÄNNER TILL $F'(x)$ SÅ KAN VI ÅTERFÅ DEN SÖKTA DERIVATAN ENLIGT:

$$F'(x) = D\left(\ln f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{(KEDJEREGELN)}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = f(x)\cdot F'(x)$$

NU BERÄKNAR VI $F'(x)$ OCH ANVÄNDER UPPREPADE GÅNGER ATT $D\left(\ln g(x)\right) = g'(x)/g(x)$:

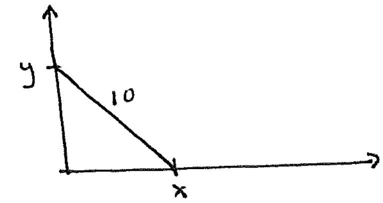
$$F'(x) = \frac{e^{x^2}\cdot 2x}{e^{x^2}} + \frac{2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} + \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}\cdot(-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}$$

$$- \frac{6(\ln x)^5\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^6} - \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 2x + \frac{2}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{\tan x}{2} - \frac{6}{x\cdot\ln x} - \frac{2}{\tan x}$$

SVAR: $$f'(x) = f(x)\cdot\left[2x + \frac{2}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{\tan x}{2} - \frac{6}{x\ln x} - \frac{2}{\tan x}\right]$$

$\boxed{3.21}$



SÖKT: $y'(t_0)$ DÅ $x(t_0) = 6$

GIVET $x'(t_0) = 2$

STÄLL UPP SAMBAND MELLAN y OCH x M.H.A. PYTHAGORAS:

$$y = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$$

DERIVERA M.A.P. t GENOM ATT ANVÄNDA KEDJEREGELN:

$$y'(t) = \frac{1}{2}\left(100 - x(t)^2\right)^{-1/2} \cdot D\left(100 - x(t)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(100 - x(t)^2\right)^{-1/2} \cdot \left(-2 \cdot x(t) \cdot x'(t)\right)$$

SÄTT IN GIVNA VÄRDEN PÅ $x(t_0)$ OCH $x'(t_0)$:

$$y'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(100 - 6^2\right)^{-1/2} \cdot \left(-2 \cdot 6 \cdot 2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} \cdot (-24) = \frac{-24}{2 \cdot 8} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

SVAR: STEGENS ÖVERDEL FALLER NEDÅT MED EN HASTIGHET AV $\frac{3}{2}$ m/s.