$\boxed{4.1}$ BESTÄM STATIONÄRA PUNKTER OCH LOKALA EXTREMPUNKTER

a) $f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{x+2}$

$f'(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3x^2(x+2) - x^3 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3 + 3x^2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 0 \implies x^3 + 3x^2 = 0$ (NÄMNAREN OCH KONSTANTTERMEN OVÄSENTLIGA SÅ LÄNGE $x \neq -2$ [DÅ ÄR NÄMNAREN 0])

$\implies x^2(x+3) = 0$

$\implies x = 0$ EL. $x = -3$ STATIONÄRA PUNKTER!

UPPFÖR TECKENTABELL FÖR ATT AVGÖRA OM PUNKTERNA ÄVEN ÄR EXTREMPUNKTER.

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\implies \begin{cases} x = -3 & \text{LOKAL MINPUNKT} \\ x = 0 & \underline{\text{EJ}} \text{ EXTREMPUNKT} \end{cases}$

SVAR: $x = 0$ STATIONÄR, $x = -3$ LOKAL MINPUNKT.

$\boxed{4.1}$ BESTÄM STATIONÄRA PUNKTER & LOKALA EXTREMPUNKTER TILL f:

b) $f(x) = x^3 - 3x$

STATIONÄRA PUNKTER: x SÅ ATT $f'(x) = 0$

DERIVERA:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

SÖK NOLLSTÄLLEN:

$$3x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

D.V.S. $x = -1$ OCH $x = 1$ ÄR STATIONÄRA. BESTÄM OM DE ÄVEN ÄR LOKALA EXTREMPUNKTER GENOM ATT SE HUR $f'(x)$ ÄNDRAR TECKEN:

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

VI SER ATT -1 ÄR LOKAL MAXPUNKT, $+1$ ÄR LOKAL MINPUNKT.

SVAR: -1 LOKALT MAX, $+1$ LOKALT MIN
(BÄGGE ÄR STATIONÄRA)

$\boxed{4.5}$ SKISSERA GRAFEN, ANGE EXTREMPUNKTER, ANGE ASYMPTOTER

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ $(x \neq -1)$

SÖK STATIONÄRA PUNKTER:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0$ (STATIONÄR PUNKT)

TECKENTABELL: OBS! $x=-1$ ÄR SINGULÄR PUNKT (NÄMNAREN ÄR NOLL DÄR)

x		-1		0	
$f'(x)$	+	*	−	0	+

$\implies x = 0$ LOKAL MINPUNKT

SÖK GRÄNSVÄRDEN:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x})^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2} = 1$$

$\lim_{x\nearrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\searrow -1} f(x) = \infty$ (TÄLJARE + NÄMNARE ICKE-NEGATIVA ~~POSITIVA~~)

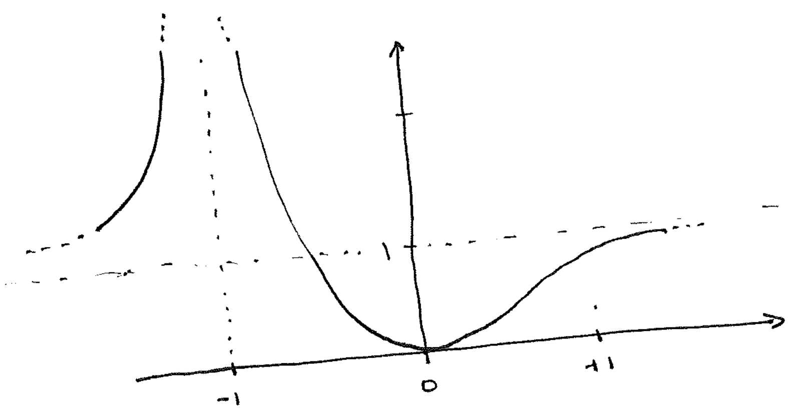
SÖK SKÄRNINGAR MED X- OCH Y-AXELN:

$f(x) = 0 \implies x = 0$ (SKÄRN. MED X-AXELN)

$f(0) = 0$ (SKÄRN. MED Y-AXELN)

BESTÄM EXTREMVÄRDEN:

$f(0) = 0$ (X=0 VAR ETT LOKALT MIN)



$\boxed{4.5}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

STAT. PKTER:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \implies x^2(x^2+3) = 0 \implies x = 0$ (STATIONÄR PKT.)

TECKENTABELL:

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$		0	

$\implies x=0$ EJ EXTREMPUNKT, D.V.S. $x=0$ ÄR EN SADELPUNKT

GRÄNSVÄRDEN:

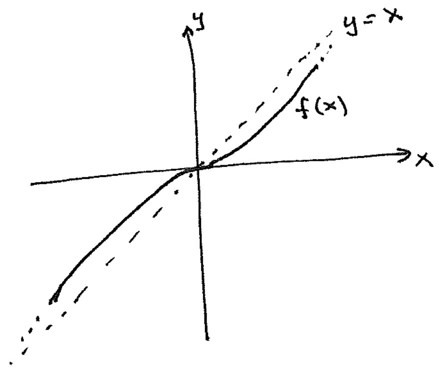
$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{x^2}} \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ SÖK ASYMPTOTER!

SÖK ASYMPTOTER $y = kx+m$ (OBS! DET KAN HÄNDA ATT MAN FÅR OLIKA ASYMPTOTER DÅ $x\to\infty$ OCH $x\to-\infty$)

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 1$ OM $x \to \pm\infty \implies \underline{k=1}$

$f(x) - kx = \dfrac{x}{1+x^{-2}} - x = \dfrac{x - x(1+x^{-2})}{1+x^{-2}} = \dfrac{-x^{-1}}{1+x^{-2}} = -\dfrac{1}{x+x^{-1}}$

$\longrightarrow 0$ OM $x \to \pm\infty \implies \underline{m=0}$



$(y = kx+m,\ k=1,\ m=0)$

TEN-07 8/1

BESTÄM STÖRSTA + MINSTA VÄRDE AV

$\boxed{5.}$

$$g(x) = 3\ln(3+2x) - 2\ln(1+2x), \qquad 0 \le x \le 2.$$

i) SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$g'(x) = 3\cdot\frac{2}{3+2x} - 2\cdot\frac{2}{1+2x} = \frac{6(1+2x)-4(3+2x)}{(3+2x)\cdot(1+2x)}$$

$$= \frac{4x-6}{(3+2x)(1+2x)}$$

$$g'(x) = 0 \implies 4x-6=0 \implies x = \frac{3}{2}$$

ii) TECKENTABELL

x		$\frac{3}{2}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$

$\implies$ $x = \frac{3}{2}$ LOKALT MIN.

$$g\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3\ln 6 - 2\ln 4 = \ln\left(\frac{6^3}{4^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{27}{2}\right)$$

iii) RANDVÄRDEN

OBS: ENL. OVAN ÄR g STRIKT AVTAGANDE DÅ $0 \le x \le \frac{3}{2}$ SÅ $g(0) > g\left(\frac{3}{2}\right)$, SAMT SÅ ÄR g STRIKT VÄXANDE DÅ $\frac{3}{2} < x \le 2$ SÅ $g(2) > g\left(\frac{3}{2}\right)$. D.V.S. $x = \frac{3}{2}$ ÄR GLOBAL MINPUNKT.

JÄMFÖR $x=0$ OCH $x=2$ FÖR ATT AVGÖRA VILKEN SOM ÄR GLOBAL MAXPUNKT:

$$g(0) = 3\ln 3 - 2\ln 1 = \ln 27$$
$$g(2) = 3\ln 7 - 2\ln 5 = \ln\left(\frac{7^3}{5^2}\right) = \ln\left(\frac{49}{25}\cdot 7\right) < \ln 14$$

D.V.S. $x=0$ ÄR MAXPUNKT.

SVAR: $\max g(x) = \ln 27$, $\min g(x) = \ln\left(\frac{27}{2}\right)$

4.15

a) VISA ATT: $\ln x \leq x-1$, OM $x>0$

LÅT $f(x) = x-1-\ln x$. VI VILL VISA ATT $f(x) \geq 0$ VILKET VI GÖR GENOM ATT BESTÄMMA MINIMUM FÖR f.

i) SÖK STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 1 \qquad f(1) = 1-1-\ln 1 = 0$$

ii) TECKENTABELL

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\implies$ $x=1$ LOKALT MINIMUM

EFTERSOM $x=1$ ÄR DEN ENDA STATIONÄRA PUNKTEN SÅ ÄR DEN ÄVEN ETT GLOBALT MINIMUM. D.V.S

$$f(x) \geq f(1) = 0 \qquad \square$$

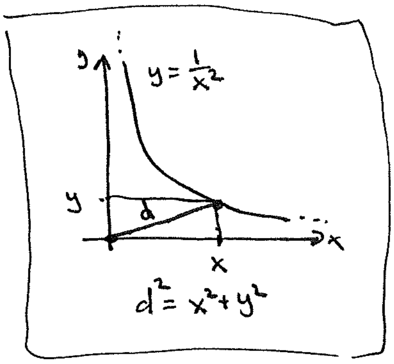
KS2-06 BESTÄM PUNKTEN PÅ KURVAN $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, NÄRMAST ORIGO.

$\boxed{4.}$

VI SKA MINIMERA AVSTÅNDET FRÅN ORIGO TILL EN PUNKT PÅ KURVAN. DET ÄR EKVIVALENT MED ATT MINIMERA KVADRATEN PÅ AVSTÅNDET, D.V.S.

MINIMERA: $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{x^4}$

DÅ $x > 0$



1. BESTÄM STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = 2x - 4x^{-5}$$

$$f'(x) = 0 \implies 2x = 4x^{-5} \implies x^6 = 2$$

$$\implies x = \underset{(-)}{+} 2^{1/6} \quad (x>0!)$$

2. UPPFÖR TECKENTABELL FÖR ATT KLASSIFICERA DE STATIONÄRA PUNKTERNA

x		$2^{1/6}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$(f'(x) \longrightarrow -\infty$, DÅ $x \to 0^+$
$f'(x) \longrightarrow +\infty$, DÅ $x \to \infty)$

$\implies x = 2^{1/6}$ ÄR EN LOKAL MINPUNKT

3. BESTÄM MIN GENOM ATT BETRAKTA LOKALA EXTREMPUNKTER SAMT EVENTUELL RAND

$$f(2^{1/6}) = \cancel{x}^{2/6} + \frac{1}{2^{4/6}} = 2^{1/3} + \frac{1}{2^{4/3}} \quad \text{MINIMUM}$$

$(f(x) \longrightarrow \infty$ DÅ $x \to 0$ EL. $x \to \infty)$

SVAR: PUNKTEN $(2^{1/6}, 2^{-1/3})$ PÅ KURVAN ÄR NÄRMAST ORIGO.