$\boxed{5.3}$ BESTÄM EN PRIMITIV FUNKTION TILL:

a) $\frac{1}{x}$

VI VET ATT

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

SVAR: $\ln|x|$

k) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

$$D\left(\frac{1}{2x+1}\right) = -\frac{2}{(2x+1)^2} \Rightarrow -\frac{1}{2} D\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

SVAR: $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$

5.17 BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER TILL:

a) $x^2 \cdot \ln x$

ANVÄND PARTIELL INTEGRATION:

(*) $\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$

I VÅRT FALL: $f'(x) = x^2$, $g(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3}$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

SVAR: $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

b) $x^2 \cdot \sin x$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot (-\cos x) dx$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot \left( x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + C$$

SVAR: $(2 - x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + C$

5.23 BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER:

a) $$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

FAKTORISERA :

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA :

$$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-2} = A + \frac{B(x+2)}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{-2-2} = A + \frac{B\cdot 0}{-2-2}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{A(x-2)}{x+2} + B \Rightarrow \frac{1}{2+2} = \frac{A\cdot 0}{2+2} + B$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

BESTÄM PRIMITIV :

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{-1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2}\right)dx \overset{\text{(LINEARITET)}}{=} -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$ KONSTANT

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

SVAR : $$\int\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$\boxed{5.26}$ BESTÄM SAMTLIGA PRIMITIVA FUNKTIONER

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{x^2}{9}+1}$

GÖR SUBSTITUTIONEN $y = \frac{x}{3}$, DÅ $dy = \frac{dx}{3}$ OCH

$$\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \int \frac{3dy}{y^2+1} = 3\int \frac{dy}{1+y^2} = 3\cdot \arctan y + C$$

$$= 3\cdot \arctan \frac{x}{3} + C$$

SVAR: $\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = 3\cdot \arctan \frac{x}{3} + C$

---

$\boxed{5.27}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$

KVADRATKOMPLETTERA!

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}$$

GÖR SUBSTITUTIONEN $y = \frac{x-1}{2}$, $dy = \frac{dx}{2}$:

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2\,dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan y + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

SVAR: $\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

---

5.41 BESTÄM ALLA PRIMITIVA FUNKTIONER TILL:

b) $f(x) = \sin^4 x \, dx$

ANVÄND DUBBLA VINKELN FÖR COSINUS:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$= 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

VI FÅR

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left\{ \int dx - 2\int \cos 2x \, dx + \int \cos^2 2x \, dx \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left\{ x - \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left\{ x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left\{ x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{4} \right\} + C$$
$$= \underline{\underline{\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C}}$$

---

SAMMA METOD FUNGERAR FÖR $(\sin x)^{2n}$ OCH $(\cos x)^{2n}$, D.V.S DÅ EXPONENTEN ÄR JÄMN. ÄR EXPONENTEN UDDA KAN MAN ANVÄNDA TRIGONOMETRISKA ETTAN OCH EN SUBSTITUTION, EX:

$$\int (\sin x)^{2n+1} dx = \int (\sin x)^{2n} \cdot \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^n \cdot \sin x \, dx$$
$$= \left\{ \begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \, dx \end{aligned} \right\} = -\int (1-t^2)^n \cdot dt = \ldots$$

SUBSTITUTIONEN FUNGERAR FÖR INTEGRALER AV TYPEN

$$\int f(\sin x) \cos x \, dx = \left\{ \begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x \, dx \end{aligned} \right\} = \int f(t) dt$$
$$\int f(\cos x) \sin x \, dx = \left\{ \begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x \, dx \end{aligned} \right\} = -\int f(t) dt$$

---

6.4 VARFÖR ÄR FÖLJANDE LIKHET ORIMLIG?

$$\int_0^{1/2} (\arcsin x)^2 \, dx = 1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \qquad \text{(OBS! FEL!)}$$

INTEGRANDEN ÄR ICKE-NEGATIV $\left( (\arcsin x)^2 \geq 0 \right)$ SÅ RÄKNEREGELN (✱) (FRÅN FÖREGÅENDE UPPGIFT) GER

$$V\text{-}L = \int_0^{1/2} (\arcsin x)^2 \, dx \geq \int_0^{1/2} 0 \cdot dx = 0$$

MEN $\pi > 3$ SÅ

$$H\text{-}L = 1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 < 1 - \left(\frac{3}{3}\right)^2 = 0$$

D.V.S. V-L ÄR $\geq 0$ MEDANS H-L ÄR $< 0$ SÅ LIKHET KAN INTE GÄLLA.

---

(✱) SE RÄKNEREL (ii) PÅ TEORIDELEN FÖR DENNA ÖVNING (MED $f(x) \equiv 0$)

$\boxed{6.10}$ BESTÄM MAXPUNKT TILL

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cdot \sin t \, dt, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$

VI ANVÄNDER ANALYSENS HUVUDSATS (S. 296):

$$\left. \begin{array}{l} S(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b \\ f \text{ KONTINUERLIG PÅ } [a,b] \end{array} \right\} \Longrightarrow S'(x) = f(x)$$

LÖS UPPGIFTEN SOM VANLIGT OPTIMERINGSPROBLEM:

i) STATIONÄRA PUNKTER

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot \sin x$$

$$f'(x) = 0 \underset{(e^{-x^2} > 0)}{\Longrightarrow} \sin x = 0 \underset{(0 \le x \le 2\pi)}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

ii) TECKENTABELL

| $x$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

$\Longrightarrow$ $x = \pi$ MAXPUNKT OCH DÅ RANDEN OCKSÅ STATIONÄR SER VI ATT DET ÄR EN GLOBAL MAXPUNKT.

SVAR: $x = \pi$

$\boxed{6.11}$ BERÄKNA DERIVATAN

b) $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt, \quad x > 0$

VI SER ATT $f(x) = g(h(x))$ DÄR

$$h(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = \int_1^{x} \cos(t^2)\,dt$$

ANALYSENS HUVUDSATS GER ATT

$$g'(x) = \cos(x^2).$$

KEDJEREGELN GER

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$
$$= \cos(h(x)^2) \cdot h'(x)$$
$$= \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

SVAR: $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$

---

6.15

b) $$\int_0^1 e^x \cdot \ln(1+e^x)\,dx = \begin{Bmatrix} t = 1+e^x \\ dt = e^x dx \end{Bmatrix} = \int_2^{1+e} 1\cdot \ln t \, dt$$

$$= \left[t\cdot \ln t\right]_2^{1+e} - \int_2^{1+e} t\cdot \frac{1}{t}\,dt$$

$$= (1+e)\cdot \ln(1+e) - 2\cdot \ln 2 - (1+e-2)$$

$$= 1-e+(1+e)\cdot \ln(1+e) - \ln 4$$

---

6.18

a) $$\int_1^2 \frac{x\cdot \ln x}{(1+x^2)^2}dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot \ln x\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$\left(\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot \ln 2 + \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot \ln 2 + \frac{1}{2}\left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot \ln 2 - \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{4}\cdot \ln 2$$

$$= \frac{13}{20}\cdot \ln 2 - \frac{1}{4}\cdot \ln 5$$

---