6.19 BERÄKNA INTEGRALEN

b) $\int_0^{2\pi} e^{-x} \cdot |\sin x| \, dx =: I$

DELA UPP INTERVALLET $[0, 2\pi]$ DÄR $\sin x$ ÄR POSITIV/NEGATIV.

OBS: $\sin x \geq 0$ OM $0 \leq x \leq \pi$, $\sin x \leq 0$ OM $\pi < x \leq 2\pi$:

(*) $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \cdot (-\sin x) \, dx = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \cdot \sin x dx$

BETRAKTA FÖLJANDE INTEGRAL

$J := \int_a^b e^{-x} \cdot \sin x dx = \left[-e^{-x} \cdot \sin x\right]_a^b - \int_a^b (-e^{-x}) \cdot \cos x \, dx$

$= -\left[e^{-x} \cdot \sin x\right]_a^b + \left[-e^{-x} \cdot \cos x\right]_a^b - \int_a^b (-e^{-x}) \cdot (-\sin x) \, dx$

$= -\left[e^{-x} \cdot \sin x\right]_a^b - \left[e^{-x} \cdot \cos x\right]_a^b - J$

FLYTTA ÖVER J FRÅN HL:

$2J = -\left[e^{-x} \cdot \sin x\right]_a^b - \left[e^{-x} \cdot \cos x\right]_a^b = -\left[e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)\right]_a^b$

$\Rightarrow J = -\frac{1}{2}\left[e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)\right]_a^b$

SÄTT IN I EKVATION (*)

$I = -\frac{1}{2}\left[e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[e^{-x} \cdot (\sin x + \cos x)\right]_{\pi}^{2\pi}$

$= \frac{1}{2} \cdot \Big(-e^{-\pi} \cdot (\sin \pi + \cos \pi) + e^{0} \cdot (\sin 0 + \cos 0) +$

$+ e^{-2\pi} \cdot (\sin 2\pi + \cos 2\pi) - e^{-\pi} \cdot (\sin \pi + \cos \pi) \Big)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + 1 + e^{-2\pi} + e^{-\pi} \right) = \frac{1}{2}\left(1 + 2e^{-\pi} + e^{-2\pi}\right)$

SVAR: $I = \frac{1}{2}\left(1 + 2e^{-\pi} + e^{-2\pi}\right)$

6.21 BERÄKNA INTEGRALEN:

a)
$$I := \int_{-1}^{3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$$

KVADRATKOMPLETTERA UTTRYCKET UNDER ROTTECKNET:

$$x^2+2x+10 = (x+1)^2-1+10 = (x+1)^2+9$$

VI FÅR $(x+1)$ I NÄMNAREN, SKRIV OM SÅ ATT $(x+1)$ ÄVEN DYKER UPP I TÄLJAREN:

$$I = \int_{-1}^{3} \frac{(x+1)+2}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\,dx = \int_{-1}^{3} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\,dx + \int_{-1}^{3} \frac{2}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\,dx =: I_1 + I_2$$

BERÄKNA I_1 OCH I_2 VAR FÖR SIG:

$$I_1 = \left\{\begin{matrix} y=(x+1)^2 & x=-1 \Rightarrow y=0 \\ dy = 2(x+1)dx & x=3 \Rightarrow y=16 \end{matrix}\right\} = \int_0^{16} \frac{\frac{1}{2}\,dy}{\sqrt{y+9}} = \left[\sqrt{y+9}\right]_0^{16} = \sqrt{16+9}-\sqrt{9} = 2$$

$$I_2 = \left\{\begin{matrix} y=x+1 & x=-1 \Rightarrow y=0 \\ dy=dx & x=3 \Rightarrow y=4 \end{matrix}\right\} = 2\int_0^4 \frac{dy}{\sqrt{y^2+9}} \overset{(**)}{=} 2\left[\ln\left|y+\sqrt{y^2+9}\right|\right]_0^4$$

$$= 2\cdot\ln\frac{4+\sqrt{16+9}}{\sqrt{9}} = 2\cdot\ln\frac{9}{3} = 2\cdot\ln 3$$

SVAR: $I = 2+2\cdot\ln 3$

---

b)
$$I := \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+2\cdot\cos x+3}} \overset{(*)}{=} \left\{\begin{matrix} y=\cos x, & x=0 \Rightarrow y=1 \\ dy=-\sin x\cdot dx, & x=\pi \Rightarrow y=-1 \end{matrix}\right\} = \int_{+1}^{-1} \frac{-dy}{\sqrt{y^2+2y+3}}$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{(y+1)^2+2}} = \left\{\begin{matrix} z=y+1 & y=-1 \Rightarrow z=0 \\ dz=dy & y=1 \Rightarrow z=2 \end{matrix}\right\} = \int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{z^2+2}} \overset{(**)}{=} \left[\ln\left|z+\sqrt{z^2+2}\right|\right]_0^2$$

$$= \ln\frac{2+\sqrt{4+2}}{\sqrt{2}} = \ln\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

SVAR: $I = \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

(*) OBS! $\cos x$ ÄR MONOTON PÅ INTERVALLET $[0,\pi]$. DET ÄR VIKTIGT ATT KONTROLLERA DETTA NÄR MAN GÖR SUBSTITUTIONER MED FUNKTIONER SOM $\cos x$ SOM INTE ÄR MONOTONA PÅ HELA SITT DEFINITIONSOMRÅDE.

(**) SE FORMEL (12) PÅ S. 251.

6.26 BERÄKNA (DEN GENERALISERADE) INTEGRALEN

a) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

BETRAKTA (DEN DEFINITA) INTEGRALEN $(t>0)$:

$$\int_0^t \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{array}, \quad x = t \Rightarrow y = t^2 \right\}$$

$$= \int_0^{t^2} \frac{\frac{1}{2}dy}{1+y} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+y)\right]_0^{t^2} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+t^2) - \ln 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

SVAR: INTEGRALEN ÄR DIVERGENT

6.29 BERÄKNA (DEN GENERALISERADE) INTEGRALEN

a) $\int_0^1 \ln x\,dx$

OBS! $\ln x \longrightarrow -\infty$ DÅ $x \searrow 0$. BETRAKTA (DEN DEFINITA) INTEGRALEN $(t>0)$

$$\int_t^1 \ln x\,dx = \int_t^1 1\cdot \ln x\,dx = -\int_t^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx + \left[x\cdot \ln x\right]_t^1$$

$$= -\int_t^1 dx + \ln 1 - t\cdot \ln t$$

$$= -(1-t) - t\cdot \ln t \xrightarrow[t\searrow 0]{} -1 - 0$$

SVAR: $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$

$\boxed{6.33}$ AVGÖR OM INTEGRALEN ÄR KONVERGENT / DIVERGENT

a) $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2} \cdot \sqrt{1+x^{-3}}} = (*)$$

OBS: $\sqrt{1+x^{-3}} \geq 1$ OM $x \in [2, \infty)$, SÅ

$$(*) \leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty$$

D.V.S. INTEGRALEN ÄR KONVERGENT.

b) $$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x^{-1}}} = (**)$$

OBS: $\sqrt{1-x^{-1}} \leq 1$ OM $x \in [2, \infty)$, SÅ

$$(**) \geq \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$$

D.V.S. INTEGRALEN ÄR DIVERGENT.

OM $t > 0$ SÅ: $\int_t^{\infty} \frac{dx}{x^a}$ ÄR $\begin{cases} \text{KONVERGENT OM } a > 1 \\ \text{DIVERGENT OM } a \leq 1 \end{cases}$

$\boxed{6.42}$ AVGÖR OM DEN GENERALISERADE INTEGRALEN KONVERGERAR:

$$\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx$$

LÄGG MÄRKE TILL ATT TÄLJAREN ÄR BEGRÄNSAD:

$$2+\sin x \leq 2+1 = 3$$

DETTA GER

$$\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{3\,dx}{1+x^2} = 3\left[\arctan x\right]_1^{\infty} = 3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

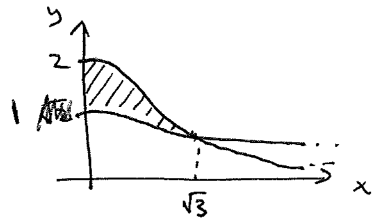
D.V.S. INTEGRALEN I V-L KONVERGERAR.

SVAR: INTEGRALEN ÄR KONVERGENT.

7.2 BESTÄM AREAN AV OMRÅDET SOM UPPFYLLER

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le y \le \frac{2}{1+x^2}, \qquad x \ge 0$$

BÅDA GRÄNSER GÅR MOT NOLL DÅ $x \to \infty$ OCH DE AVTAR MONOTONT, DEN ÖVRE GRÄNSEN GÅR FORTARE MOT NOLL SÅ KURVORNA SKÄR VARANDRA I EN PUNKT; SE FIGUR →



BERÄKNA SKÄRNINGSPUNKT

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = 2\sqrt{1+x^2} \xrightarrow{t=1+x^2} t^2 = 4t \overset{(t\neq 0)}{\Longrightarrow} t = 4$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = 4 \overset{(x>0)}{\Longrightarrow} x = \sqrt{3}$$

AREAN GES NU AV

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \left[2\cdot\arctan x - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| \right]_0^{\sqrt{3}}$$

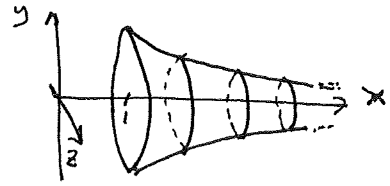
$$= 2\arctan\sqrt{3} - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{1+3}}{0+\sqrt{1+0}}\right) = \frac{2\pi}{3} - \ln(\sqrt{3}+2)$$

SVAR: $\frac{2\pi}{3} - \ln(\sqrt{3}+2)$

7.20 BESTÄM VOLYMEN AV ROTATIONSKROPPEN RUNT X-AXELN

(KAP. 7.3)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}, \quad x \geq 1$$



LÅT $A(x)$ BETECKNA AREAN AV ETT SNITT GENOM KROPPEN MED X-KOORDINAT x SÅ ATT SNITTET ÄR PARALLELLT MED y-z PLANET.

SKIVFORMELN (KAP 7.3) GER ATT VOLYMEN

$$V = \int_1^{\infty} A(x)\,dx$$

FÖR ROTATIONSVOLYMER ÄR SNITTEN CIRKLAR, SÅ

$$A(x) = \pi y^2 = \frac{\pi}{x(1+x^2)}$$

GÖR PARTIALBRÅKSUPPDELNING

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

VOLYMEN BLIR

$$V = \int_1^{\infty} \frac{\pi\,dx}{x(1+x^2)} = \pi \cdot \left\{ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} + \int_1^{\infty} \frac{-x\,dx}{1+x^2} \right\} = \pi \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_1^{\infty}$$

$$= \pi \cdot \left[\ln x - \ln\sqrt{1+x^2} \right]_1^{\infty} = \pi \cdot \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_1^{\infty}$$

$$= \pi \cdot \left\{ \lim_{x\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{1+1}} \right\} = \pi \cdot (\ln 1 - \ln 1 + \ln\sqrt{2})$$

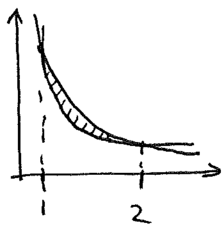
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$$

SVAR: $\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$

$\boxed{7.51}$ BESTÄM AREAN AV DET OMRÅDE SOM BEGRÄNSAS AV

(KAP. 7.1) $\quad y = \frac{1}{x}$ OCH $y = \frac{3}{2+x^2}$ $\quad (x>0)$

BESTÄM SKÄRNINGSPUNKTER



$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2+x^2} \Rightarrow 2+x^2 = 3x \Rightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

AREAN GES AV

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{2+x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dx}{1+\frac{x^2}{2}} - \int_1^2 \frac{dx}{x} = \begin{Bmatrix} t = x/\sqrt{2}, & x=1 \Rightarrow t = 1/\sqrt{2} \\ dt = dx/\sqrt{2}, & x=2 \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,dt}{1+t^2} - \Big[\ln x\Big]_1^2$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\Big[\arctan t\Big]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} - \ln 2$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2$$

SVAR: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2$