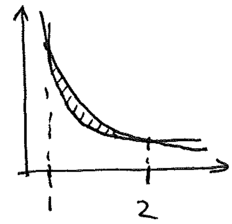
$\boxed{7.51}$ BESTÄM AREAN AV DET OMRÅDE SOM BEGRÄNSAS AV

(KAP. 7.1) $y = \frac{1}{x}$ OCH $y = \frac{3}{2+x^2}$ $(x>0)$

BESTÄM SKÄRNINGSPUNKTER



$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2+x^2} \Rightarrow 2+x^2 = 3x \Rightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

AREAN GES AV

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{2+x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dx}{1+\frac{x^2}{2}} - \int_1^2 \frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{ll} t = x/\sqrt{2}, & x=1 \Rightarrow t = 1/\sqrt{2} \\ dt = dx/\sqrt{2}, & x=2 \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{3}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,dt}{1+t^2} - \left[\ln x\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\arctan t\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} - \ln 2$$

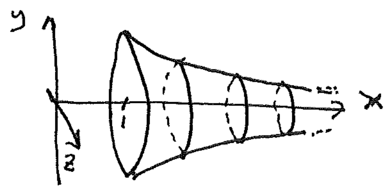
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2$$

SVAR: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2$

$\boxed{7.20}$ BESTÄM VOLYMEN AV ROTATIONSKROPPEN RUNT X-AXELN

(KAP. 7.3)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}, \quad x \geq 1$$



LÅT $A(x)$ BETECKNA AREAN AV ETT SNITT GENOM KROPPEN MED X-KOORDINAT X SÅ ATT SNITTET ÄR PARALLELLT MED Y-Z PLANET.

SKIVFORMELN (KAP 7.3) GER ATT VOLYMEN

$$V = \int_1^\infty A(x)\,dx$$

FÖR ROTATIONSVOLYMER ÄR SNITTEN CIRKLAR, SÅ

$$A(x) = \pi y^2 = \frac{\pi}{x(1+x^2)}$$

GÖR PARTIALBRÅKSUPPDELNING

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

VOLYMEN BLIR

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi\,dx}{x(1+x^2)} = \pi\cdot\left\{\int_1^\infty \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{-x\,dx}{1+x^2}\right\} = \pi\left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^\infty$$

$$= \pi\cdot\left[\ln x - \ln\sqrt{1+x^2}\right]_1^\infty = \pi\cdot\left[\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^\infty$$

$$= \pi\cdot\left\{\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right\} = \pi\cdot\left(\ln 1 - \ln 1 + \ln\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$$

SVAR: $\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$

$\boxed{7.26}$ BERÄKNA LÄNGDEN AV KURVAN

$$y = \ln(1-x^2), \qquad 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}$$

KURVANS LÄNGD GES AV

$$l = \int_0^{1/2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-2x^2+x^4+4x^2}}{1-x^2}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{1-x^2}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx$$

RATIONELL INTEGRAND: POLYNOMDIVIDERA FÖR ATT FÅ LÄGRE GRAD I TÄLJAREN.

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline 1-x^2 & 1+x^2 \\ & -(-1+x^2) \\ \hline & 2 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

PARTIALBRÅKSUPPDELA RESTTERMEN.

$$\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A-Ax+B+Bx}{(1+x)(1-x)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -A+B=0 \\ A+B=2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad A=B=1$$

VI KAN NU BERÄKNA LÄNGDEN:

$$l = \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \Big[-x + \ln(1+x) - \ln(1-x)\Big]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = -\frac{1}{2} + \ln 3$$

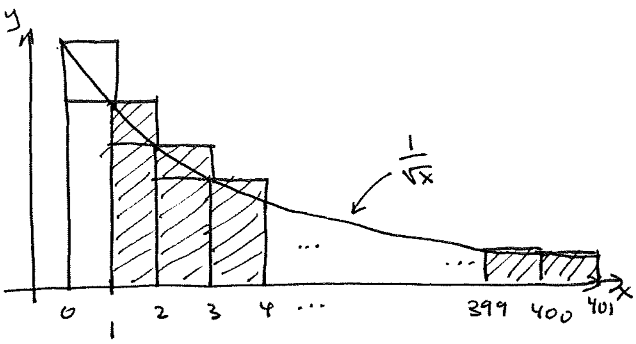
SVAR: $-\frac{1}{2} + \ln 3$

$\boxed{7.46}$ VISA ATT

(KAP. 7.9)

$$35 \leq \sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 40$$

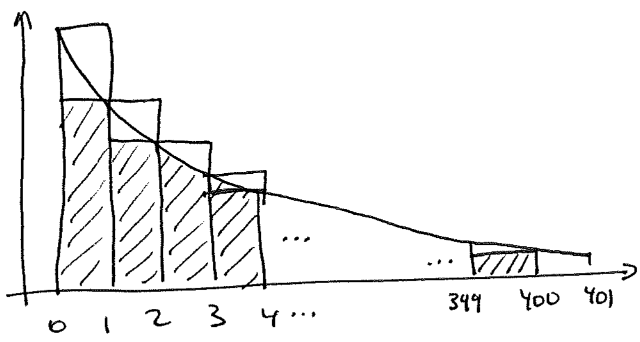
BETRAKTA SUMMAN SOM AREAN UNDER EN TRAPPSTEGSFUNKTION. SKISSERA ~~AREAN~~:



UPPSKATTA DEN SKUGGADE AREAN MED AREAN UNDER GRAFEN:

$$\sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^{401} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^{40\cancel{0}} = 2\left(\sqrt{401}-1\right) \geq 2\cdot(20-1) = 38$$

GÖR LIKNANDE UPPSKATTNING OVANIFRÅN:



$$\sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_0^{400} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^{400} = 2\cdot 20 = 40$$

DETTA VISAR ATT

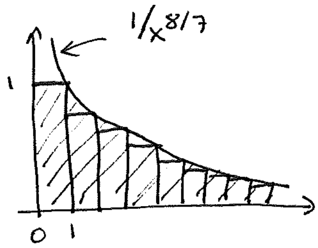
$$38 \leq \sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 40$$

AVGÖR OM FÖLJANDE SERIER KONVERGERAR :

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{8/7}}$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1}$

a) I DET HÄR FALLET AVTAR SUMMANDEN SÅ VI KAN GÖRA FÖLJANDE UPPSKATTNING (RITA FIGUR!) :

$$\underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{8/7}}}_{\text{TRAPPSTEGS-FUNKTIONENS AREA}} \leq \underbrace{1}_{\text{FÖRSTA STAPELNS AREA}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^{8/7}}}_{\text{AREA UNDER GRAFEN}}$$



$$= 1 - 7\left[x^{-1/7}\right]_1^\infty = 1 + 7 = 8$$

DETTA VISAR ATT SERIEN KONVERGERAR.

b) DEN HÄR SERIEN ~~HAR~~ HAR INTE AVTAGANDE SUMMANDER. DOCK ÄR DE AVTAGANDE FÖR "TILLRÄCKLIGT STORA n", D.V.S.

$\exists N: \frac{\ln n}{n^2+1}$ ÄR AVTAGANDE DÅ $n \geq N$

VI FÅR DÅ

(1) $$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^2+1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$$

DEN FÖRSTA SUMMAN ÄR ÄNDLIG, DEN ANDRA UPPSKATTAS SOM OVAN

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} \leq \int_N^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx \leq \int_N^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\cdot \ln x\right]_N^\infty + \int_N^\infty \frac{dx}{x^2}$$

$$= \frac{\ln N}{N} - \left[\frac{1}{x}\right]_N^\infty = \frac{\ln N}{N} + \frac{1}{N} < \infty$$

VILKET VISAR ATT ÄVEN DEN ANDRA ~~SUMMAN~~ SERIEN I (1) ÄR ÄNDLIG. SÅLEDES MÅSTE SERIEN KONVERGERA.