$\boxed{8.9}$ LÖS DIFFEKV.:

b) $(1-x^2)y' + xy = x$, $y(0)=3$, $|x|<1$

SKRIV OM PÅ FORMEN $y' + g(x)y = h(x)$:

(i) $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\cdot y = \dfrac{x}{1-x^2}$

LÅT $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ OCH SÖK PRIMITIV FUNKTION:

$$\int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \overset{|x|<1}{=} \ln(1-x^2)^{-1/2} + C$$

LÅT $G(x) = \ln(1-x^2)^{-1/2}$ OCH MULTIPLICERA V-L OCH H-L I (i) MED DEN INTEGREERANDE FAKTORN $e^{G(x)}$:

$$y'\cdot e^{G(x)} + y\cdot g(x)\cdot e^{G(x)} = g(x)\cdot e^{G(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{G(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}\right)$$

$$y\cdot e^{G(x)} = e^{G(x)} + C$$

$$y = 1 + C\cdot e^{-G(x)}$$

$$= 1 + C\cdot\sqrt{1-x^2}$$

BEGYNNELSEVILLKORET $y(0)=3$ ANVÄNDES FÖR ATT BESTÄMMA C:

$$3 = y(0) = 1 + C\cdot\sqrt{1-0^2} = 1 + C \quad\Rightarrow\quad C = 3-1 = 2$$

SVAR: $y(x) = 1 + 2\sqrt{1-x^2}$

8.12

a) LÅT $m(t)$ BETECKNA MÄNGDEN AV DET RADIOAKTIVA ÄMNET VID TIDEN t. DÅ ÄR $m'(t)$ ÄNDRING PER TIDSENHET SÅ

$$m'(t) = -\lambda \cdot m(t)$$ (FÖRÄNDRING ÄR PROPORTIONELL MOT MÄNGDEN)

ENLIGT PROBLEMETS FORMULERING.

SKRIV OM PÅ FORMEN "$y' + g(x)y = h(x)$":

$$m' + \lambda m = 0$$

DEN INTEGRERANDE FAKTORN BLIR ~~[illegible]~~ $e^{\lambda t}$. MULTIPLICERA VL OCH HL MED DENNA

$$e^{\lambda t} \cdot m' + e^{\lambda t} \cdot \lambda \cdot m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m(t) \cdot e^{\lambda t} \right) = 0$$ (PRODUKTREGELN "BAKLÄNGES")

$$\Rightarrow m(t)\, e^{\lambda t} = C \qquad \Rightarrow m(t) = C \cdot e^{-\lambda t}$$

VID TIDEN 0 FANNS 3 g AV ÄMNET; D.V.S. $m(0) = 3$. MED DENNA INFORMATION KAN VI BESTÄMMA KONSTANTEN C:

$$\left.\begin{array}{l} m(0) = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C \\ m(0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 3$$

D.V.S.

$$m(t) = 3 \cdot e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = 0.2 \quad \text{(GIVET)}$$

SÅ $m(10) = 3 \cdot e^{-0.2 \cdot 10} = 3 \cdot e^{-2}$

b) LÅT T VARA HALVERINGSTIDEN, DÅ BESTÄMS T AV

$$m(T) = \frac{m(0)}{2} \Rightarrow 3 \cdot e^{-\lambda T} = \frac{3}{2} \Rightarrow -\lambda T = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{0.2} \cdot \ln 2 = 5 \cdot \ln 2$$

SVAR:
a) $m(t) = 3 \cdot e^{-0.2t}$, $m(10) = 3 \cdot e^{-2}$
b) HALVERINGSTID $T = 5 \cdot \ln 2$

$\boxed{8.38}$ LÖS DIFFEKV.:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

DETTA ÄR EN HOMOGEN LINJÄR ODE AV ANDRA ORDNINGEN MED KONSTANTA KOEFFICIENTER (KAP. 8.6).
DET KARAKTERISTISKA POLYNOMET ÄR $r^2 - 3r + 2$. SÖK RÖTTER:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$$

RÖTTERNA ÄR REELLA OCH DISTINKTA ($r_1 \neq r_2$) SÅ ENLIGT SATS 2 (S. 378) GES DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN AV

$$y(x) = A \cdot e^x + B \cdot e^{2x}$$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER.

---

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

KARAKTERISTISKA POLYNOMETS RÖTTER:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$$

VI HAR EN DUBBELROT (NÖDVÄNDIGTVIS REELL) SÅ DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN ÄR

$$y(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER.

---

c) $y'' - 6y' + 10y = 0$

KARAKTERISTISKA POLYNOMETS RÖTTER

$$r^2 - 6r + 10 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 - 9 + 10 = 0 \Rightarrow r = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$$

RÖTTERNA ÄR KOMPLEXA SÅ LÖSNINGEN GES AV SATS 3 (S. 381):

$$y(x) = e^{3x} \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x)$$

DÄR $A, B \in \mathbb{C}$ ÄR GODTYCKLIGA KONSTANTER.

$\boxed{8.53}$ $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x} + 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

HOMOGENA EKVATIONEN:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{16}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$r_1 = 4, \quad r_2 = -1$$

$$y_h(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-x}$$

SÖK PARTIKULÄRLÖSNING TILL $y'' - 3y' - 4y = 4x$: ANSÄTT $y = Cx + D$

$$y' = C, \quad y'' = 0$$

$$\left.\begin{aligned} VL &= 0 - 3C - 4Cx - 4D \\ HL &= 4x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -4C &= 4 \\ -3C - 4D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C &= -1 \\ D &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$y_p(x) = -x + \frac{3}{4}$$

SÖK PARTIKULÄRLÖSNING TILL $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x}$. LÄGG MÄRKE TILL ATT TERMER AV TYPEN $B \cdot e^{-x}$ INGÅR I HOMOGENA LÖSNINGEN, SÅ ANSÄTT $y = Ex \cdot e^{-x}$:

$$y' = E \cdot e^{-x} \cdot (1 - x)$$

$$y'' = E \cdot e^{-x} \cdot (-1 - 1 + x)$$

$$\left.\begin{aligned} VL &= E \cdot e^{-x} \cdot (-2 + \overbrace{x - 3 + 3x - 4x}^{-5}) \\ HL &= 5 \cdot e^{-x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -5E = 5 \Rightarrow E = -1$$

$$y_p(x) = -x \cdot e^{-x}$$

DEN ALLMÄNA LÖSNINGEN BLIR

$$y(x) = A \cdot e^{4x} + B \cdot e^{-x} - x + \frac{3}{4} - x \cdot e^{-x}$$

BEGYNNELSEVILLKOREN GER A OCH B:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= A + B + \frac{3}{4} = 1 \\ y'(0) &= 4A - B - 1 - 1 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &5A + \frac{3}{4} - 2 = 0 \Rightarrow \underline{A = \frac{1}{4}} \\ &\underline{B = 1 - A - \frac{3}{4} = 0} \end{aligned}$$

SVAR: $y(x) = \frac{1}{4} e^{4x} - x + \frac{3}{4} - x \cdot e^{-x}$