$\boxed{9.5}$ TAYLORUTVECKLA $f(x) = \sqrt{x}$ KRING $x = 2$ TILL ORDNING 2.

TAYLORS FORMEL:

$$f(x) = f(2) + f'(2)\cdot(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}\cdot(x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}\cdot(x-2)^3 + \dots$$

DERIVERA:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4\cdot 2^{3/2}} = -\frac{1}{8\cdot 2^{1/2}}$$

SVAR: $\sqrt{2} + \frac{x-2}{2\sqrt{2}} - \frac{(x-2)^2}{16\sqrt{2}}$

$\boxed{9.6}$ TAYLOR UTVECKLA $f(x) = \tan x$ KRING $x = 0$ TILL ORDNING 2.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2\cdot(\cos x)^{-3}\cdot(-\sin x) \qquad f''(0) = 0$$

ANDRA ORDNING:

$$f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2}\cdot x^2 = x$$

SVAR: x

$\boxed{9.12}$ VISA ATT $\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \le \frac{8|x|^3}{3}$, OM $|x| \le \frac{1}{2}$

LÅT $f(x) = \ln(1+x)$ OCH TAYLORUTVECKLA RUNT $x = 0$ MED TREDJE ORDNINGENS FELTERM!

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}\cdot x^3$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}, \qquad 0 \le \theta \le 1$$

D.V.S

$$(*) \quad \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| = \left| \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} \right|$$

OM $|x| \le \frac{1}{2}$ DÅ $1 + \theta x \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ SÅ

$$(*) \le \frac{|x|^3}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{8}{3}|x|^3$$

VILKET SKULLE VISAS.

9.23 TAYLORUTVECKLA TILL ORDNING 2 KRING $x=0$. ANGE RESTTERM SOM $x^n \cdot B(x)$.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f'(0) = -1$

$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ ← OBS! BEGRÄNSAD I NÄRHETEN AV $x=0$ (MÅSTE HA $x \geq a > -1$.)

TAYLORUTVECKLING GER:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2} + x^3\cdot B(x)$$
$$= 1 - x + x^2 + x^3\cdot B(x)$$

SVAR: $f(x) = 1 - x + x^2 + x^3 \cdot B(x)$, FÖR x NÄRA 0 $(x \geq a > -1.)$

OBS: DENNA FUNKTIONS TAYLORSERIE GES AV GEOMETRISK SERIE:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k}_{\text{GEOMETRISK SERIE}}$$ (KONVERGERAR FÖR $|x|<1$.)

ALT. LÖSNING:

ENLIGT FORMELN FÖR GEOMETRISK SERIE

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

FÅR VI ATT

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \cdot B(x)$$

ENTYDIGHETSSATSEN (S.417) GER ATT DETTA ÄR DEN SÖKTA TAYLORUTVECKLINGEN.

$\boxed{9.28}$ TAYLORUTVECKLA KRING $x=0$ TILL ORDNING 4. ANGE RESTTERM SOM $x^n \cdot B(x)$.

b) $f(x) = e^{\cos x}$

VI SKULLE KUNNA DERIVERA FYRA GÅNGER MEN DETTA BLIR JOBBIGT (PRÖVA!). ISTÄLLET ANVÄNDER VI STANDARDUTVECKLNGARNA FÖR $\cos x$ OCH e^t:

(i) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x) \qquad (x \approx 0)$$

(ii) $$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 \cdot B_2(t) \qquad (t \approx 0)$$

SÄTT IN (i) I (ii):

$$e^{\cos x} = \exp\Big\{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)}_{\approx 1 \text{ FÖR } x\approx 0, \text{ SÅ } \cancel{\ } \text{ SKRIV OM FÖRST}}\Big\} = e^1 \cdot \exp\Big\{\underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)}_{\approx 0 \text{ FÖR } x \approx 0 \text{ SÅ (ii) KAN TILLÄMPAS}}\Big\}$$

$$= e \cdot \Big\{1 + \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 \cdot B_1(x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + x^4 \cdot B_3(x)\Big)^2 + \big(x^2 \cdot B_4(x)\big)^3 \cdot B_2(x)\Big\}$$

$$= e \cdot \Big\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{2} \cdot \Big(-\frac{x^2}{2}\Big)^2 + x^6 \cdot B_5(x)\Big\}$$

$$= e \cdot \Big\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + x^6 \cdot B_5(x)\Big\}$$

$$= e - \frac{e \cdot x^2}{2} + \frac{e \cdot x^4}{6} + x^6 \cdot B_6(x)$$

SVAR: $f(x) = e - \frac{e}{2} \cdot x^2 + \frac{e}{6} \cdot x^4 + x^6 \cdot B(x) \qquad (x \approx 0)$

9.30 BERÄKNA GRÄNSVÄRDET

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

VI SER ATT BÅDE TÄLJARE OCH NÄMNARE $\to 0$ DÅ $x \to 0$. GENOM ATT TAYLORUTVECKLA TÄLJARE OCH NÄMNARE KRING $x=0$ SÅ FÅR VI MER INFORMATION OM HUR "FORT" DE NÄRMAR SIG NOLL OCH PÅ SÅ SÄTT KAN VI BERÄKNA GRÄNSVÄRDET:

(i) $$1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+x^4\cdot B_1(x)\right) = \frac{x^2}{2} - x^4\cdot B_1(x)$$

(ii) $$\ln(1+x)-x = x-\frac{x^2}{2}+x^3\cdot B_2(x) - x = -\frac{x^2}{2}+x^3\cdot B_2(x)$$

(i) OCH (ii) GER

$$\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x} = \frac{\frac{x^2}{2}-x^4\cdot B_1(x)}{-\frac{x^2}{2}+x^3\cdot B_2(x)} = \frac{1-\overbrace{x^2\cdot B_3(x)}^{\to 0}}{-1+\underbrace{x\cdot B_4(x)}_{\to 0}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{-1} = -1$$

SVAR: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x} = -1$$

VI KAN ÄVEN LÖSA UPPGIFTEN MED L'HOSPITALS REGEL:

$f(x) = 1-\cos x$, $\quad f'(x) = \sin x$

$g(x) = \ln(1+x)-x$, $\quad g'(x) = \frac{1}{1+x}-1$

NU ÄR $g'(0) = 0 = f'(0)$ SÅ VI TILLÄMPAR L'HOSPITAL EN GÅNG TILL:

$f''(x) = \cos x$ $\quad f''(0) = 1$

$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad g''(0) = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = -1$$

$\boxed{9.44}$ BERÄKNA GRÄNSVÄRDET

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x\cdot\left((1+x)^{1/3} - e^{x/3}\right)} \qquad (*)$$

ANVÄND STANDARDUTVECKLINGARNA:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

DETTA GER:

$$(*) = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} + x^5\cdot B_1(x) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + x^5\cdot B_2(x)\right)}{x\cdot\left(\cancel{1+\frac{x}{3}} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + x^3\cdot B_3(x) - \left(\cancel{1+\frac{x}{3}} + \frac{(x/3)^2}{2} + x^3\cdot B_4(x)\right)\right)}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + x^5\cdot B_5(x)}{x\cdot\left(-\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{18} + x^3\cdot B_6(x)\right)} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + x^2\cdot B_5(x)}{-\frac{1}{9} - \frac{1}{18} + x\cdot B_6(x)} = \frac{-\frac{1}{6} + x^2\cdot B_5(x)}{-\frac{1}{6} + x\cdot B_6(x)}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = 1$$

SVAR: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x\cdot\left((1+x)^{1/3} - e^{x/3}\right)} = 1$

$\boxed{9.8}$ $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) $P_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = 1 + \frac{x}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

b) FIGUR

c) $R_2(x) = \frac{f''(\theta x)}{2!}\cdot x^2 = -\frac{x^2}{8(1+x)^{3/2}}$, $0 \le \theta \le 1$

$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$

d) OM $x \ge 0$ DÅ

$|R_2(x)| = \frac{x^2}{8(1+x)^{3/2}} \le \frac{x^2}{8}$

e) OM $0 \le x \le 0.1$ DÅ

$|R_2(x)| \le \frac{x^2}{8} \le \frac{0.1^2}{8} = \frac{1}{800} = \frac{1}{8}\cdot 10^{-2} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} = 5\cdot 10^{-3}$

VI FÅR ALLTSÅ TVÅ KORREKTA DECIMALER.

$f(0.08) \approx 1.0392$, $P_1(0.08) \approx 1.0400$

f) OM $0 \le x < a$ DÅ

$|R_2(x)| \le \frac{a^2}{8} \le 5\cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow a \le \sqrt{40\cdot 10^{-4}} = \sqrt{40}\cdot 10^{-2}$

g) $P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

h) FIGUR

i) $R_3(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!}\cdot x^3 = \frac{x^3}{16\cdot(1+\theta x)^{5/2}}$, $0 \le \theta \le 1$

$f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$

j) OM $x \ge 0$ DÅ

$|R_3(x)| = \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}} \le \frac{x^3}{16}$

k) OM $0 \le x \le 0.1$ DÅ

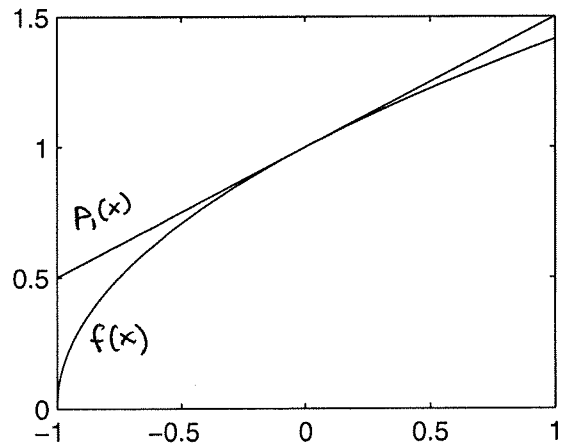
$|R_3(x)| \le \frac{x^3}{16} \le \frac{1}{16000} = \frac{1}{16}\cdot 10^{-3} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 5\cdot 10^{-4}$

D.V.S. TRE KORREKTA DECIMALER.

$f(0.08) \approx 1.0392$, $P_2(0.08) \approx 1.0392$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$



$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$