TAYLORUTVECKLING

OM $f, f', \ldots, f^{(n+1)}$ ÄR KONTINUERLIGA I EN OMGIVNING U AV a, DÅ:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},$$

FÖR ALLA $x \in U$. PUNKTEN ξ LIGGER MELLAN a OCH x, SAMT SÅ BEROR ξ BÅDE PÅ x OCH n.

(JÄMFÖR MED MEDELVÄRDESSATSEN DÅ $n=0$.)

OBS! VIKTIGT ATT KONTINUITET GÄLLER I EN OMGIVNING, ANNARS KAN VI FÅ PROBLEM.

EX $f(x) = \sqrt{x}$, $a=0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\leftarrow$ GÅR MOT ∞ DÅ $x \to 0^+$!

PROBLEM: $f(0) + f'(0)\cdot x = 0 + \dfrac{1}{\underline{\underline{2\sqrt{0}}}}\cdot x$ NEJ!

L'HOSPITALS REGEL:

SÄG ATT VI VILL BERÄKNA

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

DÄR $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ DÅ $x \to 0$. OM f, g HAR KONTINUERLIGA ANDRA-DERIVATOR SÅ KAN VI TAYLORUTVECKLA:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)+f'(0)x + x^2 \cdot B_1(x)}{g(0)+g'(0)x + x^2 \cdot B_2(x)} \underset{f(0)=g(0)=0}{\uparrow=} \frac{f'(0) + x \cdot B_1(x)}{g'(0) + x \cdot B_2(x)}$$

OM DESSUTOM $g'(0) \neq 0$ SÅ KAN VI TA GRÄNSER

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(0) + x \cdot B_1(x)}{g'(0) + x \cdot B_2(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

SATS: OM f'', g'' ÄR KONT. ~~[illegible]~~ I EN OMGIVNING TILL 0, OM $f(0) = g(0) = 0$, OCH OM $g'(0) \neq 0$, DÅ GÄLLER

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OBS: IBLAND HÄNDER ATT $f'(0) = 0 = g'(0)$. DÅ KAN MAN FÖRSÖKA ATT UPPREPA SATSEN, D.V.S. BETRAKTA $f''(x)/g''(x)$. (KRÄVS NU ATT f''', g''' ÄR KONT OCH $g''(0) \neq 0$.)