$\boxed{3.27}$

b) BERÄKNA $D^n(x^3e^x)$.

ANVÄND LEIBNIZ FORMEL

(*) $$D^n\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k f(x)\cdot D^{n-k}g(x)$$

I VÅRT FALL ÄR $f(x)=x^3$, $g(x)=e^x$.

$$D^0(f(x)) = x^3,\quad D^1(f(x)) = 3x^2,\quad D^2(f(x)) = 6x,\quad D^3(f(x)) = 6$$

$D^k(f(x)) = 0$ OM $k=4,5,6,\dots$

$D^k(g(x)) = e^x$ FÖR $k=0,1,2,\dots$

SÄTT IN I (*):

$$D^n(x^3e^x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(x^3)\,D^{n-k}(e^x) =$$

$$= \binom{n}{0}x^3\cdot e^x + \binom{n}{1}3x^2e^x + \binom{n}{2}6xe^x + \binom{n}{3}6\cdot e^x + \underbrace{\binom{n}{4}\cdot 0\cdot e^x + 0 + \cdots}_{\text{ALLA TERMER BLIR 0!}}$$

$$= e^x\cdot\left[\frac{n!}{0!(n-0)!}x^3 + \frac{n!}{1!(n-1)!}3x^2 + \frac{n!}{2!(n-2)!}6x + \frac{n!}{3!(n-3)!}6\right]$$

$$= e^x\left[x^3 + n\cdot 3x^2 + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}\cdot 6\right]$$

$$= e^x\cdot\left[x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right]$$

SVAR: $D^n(x^3e^x) = e^x\cdot\left[x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right]$