KAP. 1.4

$\boxed{1.30}$ POLYNOMDIVIDERA:

a)

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x-3 \\ \hline x^3+x+1 & x^5+3x^4-2x^3+2x-1 \\ & -(x^5+x^3+x^2) \\ \hline & 3x^4-3x^3-x^2+2x-1 \\ & -(3x^4+3x^2+3x) \\ \hline & -3x^3-4x^2-x-1 \\ & -(-3x^3-3x-3) \\ \hline & -4x^2+2x+2 \end{array}$$

SVAR: $\begin{cases} \text{KVOT: } x^2+3x-3 \\ \text{REST: } -4x^2+2x+2 \end{cases}$

b)

$$\begin{array}{r|l} & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ \hline x-1 & x^6-1 \\ & -(x^6-x^5) \\ \hline & x^5-1 \\ & -(x^5-x^4) \\ \hline & x^4-1 \\ & -(x^4-x^3) \\ \hline & x^3-1 \\ & -(x^3-x^2) \\ \hline & x^2-1 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & x-1 \\ & -(x-1) \\ \hline & 0 \end{array}$$

SVAR: $\begin{cases} \text{KVOT: } x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ \text{REST: } 0 \end{cases}$

1.31 FAKTORISERA:

c) $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

d) $x^2 - 3x + 2$

SÖK EN ROT. PRÖVA $x=1$: $1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 0$ OK

D.V.S $x-1$ ÄR EN FAKTOR. POLYNOMDIVIDERA:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-2 \\
\hline
x-1 & x^2-3x+2 \\
 & -(x^2-x) \\
\hline
 & -2x+2 \\
 & -(-2x+2) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

SVAR: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$

1.34 FAKTORISERA POLYNOMET $p(x) = x^3 - 2x - 4$

GISSA LÖSNING MED HJÄLP AV SATS 4 (s.54). OM $p(\alpha) = 0$, $\alpha = \frac{p}{q}$ SÅ MÅSTE

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \quad q = \pm 1$$

GENOM ATT PRÖVA DESSA MÖJLIGHETER SER VI ATT

$$p(2) = 2^3 - 2\cdot 2 - 4 = 8 - 8 = 0$$

D.V.S $x-2$ ÄR EN FAKTOR.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+2 \\
\hline
x-2 & x^3-2x-4 \\
 & -(x^3-2x^2) \\
\hline
 & 2x^2-2x-4 \\
 & -(2x^2-4x) \\
\hline
 & 2x-4 \\
 & -(2x-4) \\
\hline
 & 0
\end{array}
\Longrightarrow \quad p(x) = (x-2)(x^2+2x+2)
$$

ÅTERSTÅR ATT FAKTORISERA x^2+2x+2. DETTA KAN VI GÖRA GENOM ATT LÖSA

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \underset{\text{(KVADRATKOMPLETTERA)}}{\Longrightarrow} (x^2 + 2x + 1) - 1 + 2 = 0 \Longrightarrow (x+1)^2 + 1 = 0$$

$\Longrightarrow (x+1)^2 = -1$ SAKNAR REELLA RÖTTER, TY $(x+1)^2 \geq 0$!

D.V.S VI KAN INTE FAKTORISERA x^2+2x+2 I REELLA FAKTORER.

SVAR: $p(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x+2)$

KAP. 1.4

$\boxed{1.35}$ BERÄKNA (GEOMETRISK) SUMMA!

a) $$1+2+4+8+16+32 = 2^0+2^1+\dots+2^5 = \sum_{k=0}^{5} 2^k = \frac{2^6-1}{2-1} = 63$$

c) $$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{128} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{256}\right)$$
$$= 2\cdot\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right)$$
$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$
$$= 2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 4\cdot\frac{511}{512}$$
$$= \frac{511}{128}$$

e) $$1-x+x^2-x^3+\dots-x^9 = (-x)^0+(-x)^1+(-x)^2+(-x)^3+\dots+(-x)^9$$
$$= \sum_{k=0}^{9}(-x)^k$$
$$= \frac{1-(-x)^{10}}{1-(-x)}$$
$$= \frac{1-x^{10}}{1+x}$$

$\boxed{1.37}$ BERÄKNA SUMMAN:

b) $$\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \sum_{k=1}^{n} e^{-1} \cdot e^{-k+1} = e^{-1} \sum_{k=1}^{n} e^{-k+1} =$$

$$= \left\{ j = k-1, \quad \begin{matrix} k=1 \Rightarrow j=0 \\ k=n \Rightarrow j=n-1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} e^{-j} = e^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{e}\right)^{j}$$

$$= e^{-1} \cdot \frac{1-(e^{-1})^{n}}{1-e^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1-e^{-n}}{e-1}}}$$

e) $$\sum_{k=2}^{5} \frac{k \cdot (-1)^k}{2^k}$$

OBS! EJ GEOMETRISK SUMMA, TY

$$\frac{\dfrac{k \cdot (-1)^k}{2^k}}{\dfrac{(k+1) \cdot (-1)^{k+1}}{2^{k+1}}} = \frac{2^{k+1}}{2^k} \cdot \frac{k\,(-1)^k}{(k+1) \cdot (-1)^{k+1}} = -2 \cdot \frac{k}{k+1}$$

D.V.S. KVOTEN AV TVÅ PÅ VARANDRA FÖLJANDE TERMER ÄR EJ KONSTANT (DEN BEROR PÅ INDEX k).

VI FÅR RÄKNA PÅ "FÖR HAND":

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{k \cdot (-1)^k}{2^k} = \frac{2 \cdot (-1)^2}{2^2} + \frac{3 \cdot (-1)^3}{2^3} + \frac{4 \cdot (-1)^4}{2^4} + \frac{5 \cdot (-1)^5}{2^5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{32} = \frac{16}{2 \cdot 16} - \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} + \frac{8}{4 \cdot 8} - \frac{5}{32}$$

$$= \frac{16-12+8-5}{32} = \underline{\underline{\frac{7}{32}}}$$

$\boxed{1.42}$ BYGG UPP PASCALS TRIANGEL

d)

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

BÖRJA MED TRE ETTOR

LÄGG IHOP FRÅN RAD OVAN OCH SÄTT ETTOR LÄNGST UT

$$\rightarrow \begin{array}{ccccccccc|c} & & & & & & & & & n \\ & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4 \end{array}$$

NU KAN VI SKRIVA UPP $(a+b)^n$ FÖR $n=2,3,4$

a) $(a+b)^2 = 1\cdot a^2 \cdot 2\cdot a\cdot b + 1\cdot b^2$

b) $(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3$

c) $(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + 1\cdot b^4$

$\boxed{1.45}$ BESTÄM KOEFFICIENTEN FÖR x^3 I POLYNOMET:

$$(3-x)^8 = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}3^k\cdot(-x)^{8-k}$$ (BINOMIALSATSEN)

x^3 KOEFFICIENTEN FÅS FRÅN $k=5$ $(8-5=3)$:

$$\binom{8}{5}3^5\cdot(-x)^{8-5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot 3^5\cdot(-x)^3$$

$$= -\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}\cdot 3^5\cdot x^3$$

$$= -8\cdot 7\cdot 3^5\cdot x^3 = \underbrace{-56\cdot 3^5}_{\text{KOEFFICIENT}}\cdot x^3$$

SVAR: $-56\cdot 3^5$ $(=-13608)$

$\boxed{1.44}$ VAD ÄR KOEFFICIENTEN FÖR x^{13} I $(x+1)^{15}$?

ANVÄND BINOMIALSATSEN

$$(x+1)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^k = \binom{15}{0} \cdot 1 + \binom{15}{1} \cdot x + \dots + \binom{15}{13} \cdot x^{13} + \binom{15}{14} \cdot x^{14} + \binom{15}{15} \cdot x^{15}$$

VI SER ATT DEN SÖKTA KOEFFICIENTEN ÄR

$$\binom{15}{13} = \frac{15!}{13!\,(15-13)!} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 15 \cdot 7 = 105$$

SVAR: 105

$\boxed{1.47}$ VAD ÄR HÖGSTAGRADSTERMEN I $(x^3-2)^{16} - (x^4+3)^{12}$?

ANVÄND BINOMIALSATSEN:

(1) $$(x^3-2)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \cdot (x^3)^k \cdot (-2)^{16-k}$$

(2) $$(x^4+3)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^4)^k \cdot (3)^{12-k}$$

HÖGSTAGRADSTERMERNA FÖR (1) OCH (2) ÄR

$$\binom{16}{16} \cdot (x^3)^{16} \cdot (-2)^0 = x^{48}$$

$$\binom{12}{12} \cdot (x^4)^{12} \cdot (3)^0 = x^{48}$$

DESSA TAR UT VARANDRA (VI ÄR INTRESSERADE AV "(1) − (2)"), SÅ VI RÄKNAR UT NÄST-HÖGSTA ORDNINGENS TERMER:

$$\binom{16}{15} \cdot (x^3)^{15} \cdot (-2)^{16-15} = 16 \cdot x^{45} \cdot (-2)^1 = -32 \cdot x^{45}$$ ← HÖGST!

$$\binom{12}{11} \cdot (x^4)^{11} \cdot 3^{12-11} = 12 \cdot x^{44} \cdot 3 = 48\, x^{44}$$

SVAR: $-32x^{45}$