FUNKTIONER

INJEKTIV: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

(ALT. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)

(GRAFEN TILL f SKÄR HORISONTELLA LINJER I <u>HÖGST</u> <u>EN</u> PUNKT)

INVERS: g INVERS TILL f $\Leftrightarrow$ $g(f(x)) = x$ OCH $f(g(x)) = x$

(BETECKNING $g = f^{-1}$)

(OBS! f HAR INVERS $\Leftrightarrow$ f INJEKTIV)

(INVERS FÅS GENOM SPEGLING I $y = x$)

SAMMANSÄTTNING: $f \circ g\,(x) = f(g(x))$

LIKHET: $f = g \Leftrightarrow$ f OCH g HAR SAMMA DEFINITIONSMÄNGD D
<u>OCH</u> $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$

BEGRÄNSAD:

$f(x) \leq B \quad \forall x \in D_f$ (UPPÅT BEGR.)

$f(x) \geq B \quad \forall x \in D_f$ (NEDÅT BEGR.)

MONOTON:

$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (VÄXANDE)

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (STRIKT VÄXANDE)

$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (AVTAGANDE)

$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (STRIKT AVTAGANDE)

JÄMN: $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

UDDA: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

$\boxed{1.87}$ BESTÄM INVERS:

b) $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

f ÄR INTE INJEKTIV VILKET KAN SES GENOM ATT TESTA SIG FRAM, T.EX. SÅ

$$f(-1) = |-1| = 1 = |1| = f(1)$$

SVAR: f SAKNAR INVERS.

d) $f(x) = x^2 + 4x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$

f ÄR INTE INJEKTIV VILKET KAN VISAS GENOM ATT HITTA TVÅ TALE $x_1 \neq x_2$ S.A. $f(x_1) = f(x_2)$. FÖR ATT HITTA SÅDANA TAL KAN VI T.EK. LÖSA EKVATIONE

$$x^2 + 4x + 5 = a \qquad (a \text{ ÄR EN KONSTANT})$$

$$(x+2)^2 - 4 + 5 = a$$

$$(x+2)^2 = a - 1$$

$$x = -2 \pm \sqrt{a-1}$$

T.EX. OM $a = 2$ SÅ KAN VI SÄTTA $x_1 = -2+1 = -1$, $x_2 = -2-1 = -3$

OCH $f(-1) = 1 - 4 + 5 = 2$, $f(-3) = 9 - 12 + 5 = 2$.

SVAR: f SAKNAR INVERS

f) $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}, \quad x > 0$

FÖR ATT BESTÄMMA INVERS LÖSER VI UT X FRÅN EKVATIONEN

$$y = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = y^2 - 1$$

$$x = \frac{1}{y^2 - 1}$$

FRÅN DETTA LÄSER VI AV ATT $f^{-1}(y) = (y^2-1)^{-1}, \quad y > 0$.

(KONTROLL:

$$f(f^{-1}(y)) = f\left((y^2-1)^{-1}\right) = \sqrt{1 + y^2 - 1} = \sqrt{y^2} = |y| = y \qquad (y > 0!)$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right)^{-1} = x$$
)

SVAR: $f^{-1}(y) = \frac{1}{y^2 - 1}, \quad y > 0$.

$\boxed{1.88}$ FINNS NÅGON POTENSFUNKTION f SÅDAN ATT $f = f^{-1}$?

EN POTENSFUNKTION KAN SKRIVAS $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$

(SÅ ATT f ÄR DEF. FÖR $\alpha < 0$ OCH α EJ HELTAL)

SÖK INVERS:

$$y = x^{\alpha} \iff y^{1/\alpha} = x$$

D.V.S.

$$f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}, \quad y > 0$$

SÖK f S.A. $f = f^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^{\alpha} \\ f^{-1}(x) &= x^{1/\alpha} \end{aligned}\right\} \quad x^{\alpha} = x^{1/\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = 1$$

(SKA GÄLLA FÖR ALLA $x > 0$!) $\Rightarrow \alpha = \pm 1$

SVAR: JA, $f(x) = x = f^{-1}(x)$, $f(x) = x^{-1} = f^{-1}(x)$.

(OCH DENNA HAR DEFINITIONSMÄNGD $\mathbb{R}$) (DENNA HAR DEF. MÄNGD $x \neq 0$)

$\boxed{1.89}$

$$\begin{cases} f(x) = 2x+1 \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

BESTÄM:

a) f^{-1} : $y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$

SVAR: $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

b) $f \circ g$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2x^2+1$$

SVAR: $f \circ g(x) = 2x^2+1$

c) $g \circ f$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2$$

SVAR: $g \circ f(x) = (2x+1)^2$

d) $f^{-1} \circ g$:

$$f^{-1} \circ g(x) = f^{-1}(g(x)) = \frac{x^2-1}{2}$$

SVAR: $f^{-1} \circ g(x) = \frac{x^2-1}{2}$

$\boxed{1.91}$

a) VISA ATT SUMMAN AV TVÅ VÄXANDE FUNKTIONER ÄR VÄXANDE.

f, g VÄXANDE $\iff$ ($x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ OCH $g(x) \le g(y)$)

OM $x<y$ DÅ

$$f(x) + g(x) \le f(y) + g(x) \leftarrow$$ (OLIKHET BEVARAS VID ADDITION)

$$f(x) + g(x) \le f(x) + g(y) \checkmark$$

($f(x) \le f(y) \Rightarrow f(x)+g(x) \le f(y)+g(x) \le f(y)+g(y)$)

SÅ $f(x)+g(x) \le f(y) + g(y)$. D.V.S. $f+g$ ÄR VÄXANDE.

b) ÄR $f \cdot g$ OCKSÅ VÄXANDE? (f, g SOM OVAN)

OBS! $f(x) \cdot g(x) \le f(y) \cdot g(x)$ OM $g(x) \ge 0$!

$\searrow \ge f(y) \cdot g(x)$ OM $g(x) < 0$

D.V.S. $f(x) \cdot g(x)$ BEHÖVER EJ VARA VÄXANDE.

TA T.EX. $f(x) = x = g(x)$. DÅ ÄR $f(x), g(x)$ VÄXANDE MEN

$f(x) \cdot g(x) = x^2$ ÄR EJ VÄXANDE.

$\boxed{1.92}$ ÄR FUNKTIONEN UDDA EL. JÄMN?

a) $f(x)=x^2$: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ JÄMN!

b) $f(x)=x^3$: $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$ UDDA!

c) $f(x)=x^2+2x+1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^2-2x+1 = x^2-2x+1 = (x-1)^2 \\ f(x) = (x+1)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \neq f(-x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{array}$$

VARKEN UDDA EL. JÄMN

d) $f(x) = x\,(e^x+e^{-x})$: $f(-x) = (-x)\cdot(e^{-x}+e^{-(-x)}) = -x\,(e^{-x}+e^x)$

$= -x\cdot(e^x+e^{-x}) = -f(x)$ UDDA!

e) $f(x) = x\cdot \ln x$: $f(-x) = (-x)\cdot \ln(-x)$

$\uparrow$

NEJ! ln EJ DEF. FÖR $x<0$!

VARKEN UDDA EL. JÄMN

BINOMIALSATSEN:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \qquad \left(= \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot x^n \right)$$

$$(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n} = x^n + ? \cdot x^{n-1} + \cdots + ? \cdot x + 1^n$$

DET VISAR SIG ATT
DETTA ÄR BINOMIALKOEFF.

PASCALS TRIANGEL

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \cdots \quad \binom{4}{4}$$

HAR SETT ATT

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (\text{om } k>0 \text{ och } k<n)$$

ANVÄND DETTA OCH $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ FÖR ATT RÄKNA UT $\binom{n}{k}$:

1 ← $n=0$

1 1 ← $n=1$

1 2 1 ← $n=2$ $\qquad (x+1)^2 = 1+2x+x^2$

1 3 3 1 ← $n=3$

1 4 6 4 1 ← $n=4$ $\qquad (x+1)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

1 5 10 10 5 1 ← $n=5$

1 6 15 20 15 6 1 ← $n=6$ $\qquad (x+1)^6 = 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$

1 1

...

1

$\boxed{1.46}$ BESTÄM DEN KONSTANTA TERMEN I $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{15}$.

$$\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{15} = \left(\frac{1}{x^3}\cdot\left(x^5+1\right)\right)^{15} = \frac{1}{x^{45}}\cdot\left(x^5+1\right)^{15}$$

$$= x^{-45}\cdot\left(x^{5\cdot 15}+\binom{15}{14}x^{5\cdot 14}+\binom{15}{13}\cdot x^{5\cdot 13}+\dots+\binom{15}{9}\cdot \underbrace{x^{5\cdot 9}}_{x^{45}}+\dots+1\right)$$

KONSTANTA TERMEN BLIR

$$x^{-45}\cdot\binom{15}{9}\cdot x^{45} = \binom{15}{9} = \frac{15!}{9!\,(15-9)!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot (9!)}{9!\cdot 6!}$$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} =$$

$$= 7\cdot 13\cdot 11\cdot 5 = 35\cdot 13\cdot 11 = (350+105)\cdot 11 = 455\cdot 11$$

$$= 4550+455 = 5005$$

SVAR: 5005

1.51 — RITA KURVAN

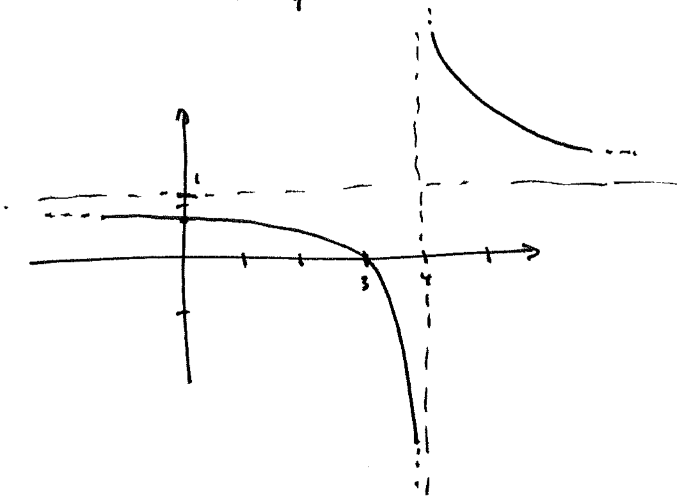
f) $y = \dfrac{x-3}{x-4}$

OM $x = 3$ SÅ ÄR $y = 0$

$x = 4$ SÅ ÄR y EJ DEF.

$x = 0$ $y = \dfrac{3}{4}$

x		3		4	
$x-3$	$-$	0	$+$		
$x-4$		$-$		0	$+$
y	$+$	0	$-$	?	$+$



~~[illegible]~~

OM $x < 0$ OCH $|x| >> 1$

DÅ
$$y = \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} \approx 1$$

P.S.S. $y \approx 1$ OM $x >> 1$

---

c) $y = \dfrac{1}{x-4}$

OM $x = 4$ SÅ ÄR y EJ DEF.

DÅ $x >> 1$ ÄR $y \approx 0$ OCH $y > 0$

$x < 4$ OCH $|x| >> 1$ ÄR $y \approx 0$ OCH $y < 0$