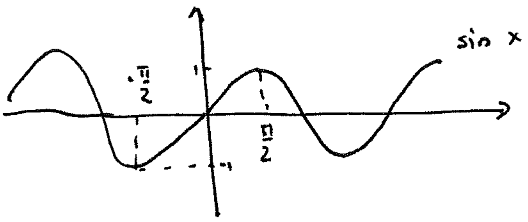
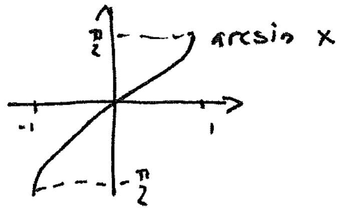
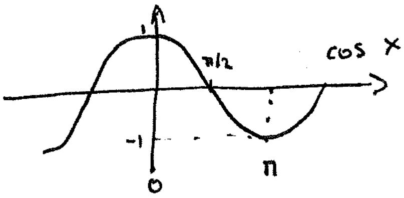
ARCUSFUNKTIONERNA ("INVERSER" TILL TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER)

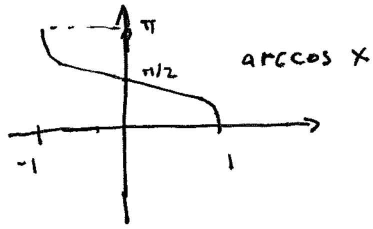




(INVERS TILL $f(x) = \sin x$, $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

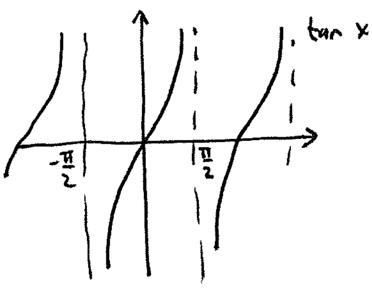
OBS! $\begin{cases} \arcsin(\sin x) \neq x \quad \text{i allmänhet} \quad \left(\text{MEN } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x\right) \\ \sin(\arcsin x) = x \quad (x \in [-1, 1]) \end{cases}$

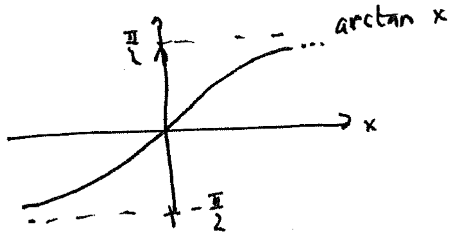




(INVERS TILL $f(x) = \cos x$, $D_f = [0, \pi]$)

OBS! $\begin{cases} \arccos(\cos x) \neq x \quad \text{i allmänhet} \quad \left(\text{MEN } x \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x\right) \\ \cos(\arccos x) = x \quad (x \in [-1, 1]) \end{cases}$





INVERS TILL $f(x) = \tan x$, $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

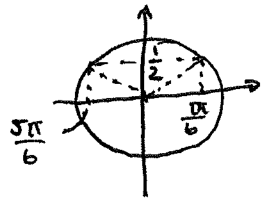
OBS! $\begin{cases} \arctan(\tan x) \neq x \quad \text{i allmänhet} \quad \left(\text{MEN } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow \arctan(\tan x) = x\right) \\ \tan(\arctan x) = x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$

1.115

a) LÖS $\sin x = \frac{1}{2}$

EN LÖSNING ÄR $\frac{\pi}{6}$, TY $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. OM VI BETRAKTAR ENHETSCIRKELN FÅR VI ÄVEN LÖSNINGEN $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

KOM IHÅG ATT sin ÄR 2π-PERIODISK SÅ ALLA LÖSNINGAR GES AV:



SVAR: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ELLER $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

DÄR $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) $\arcsin\frac{1}{2} = ?$

SVARET GES AV DEN LÖSNING TILL (a) SOM LIGGER I INTERVALLET $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (DETTA ÄR VÄRDEMÄNGDEN ~~DEFINITIONSMÄNGDEN~~ TILL arcsin).

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ GER $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6} < -\frac{\pi}{2}$, ...

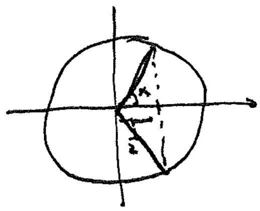
$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ GER $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6} < -\frac{\pi}{2}$, ...

VI SER ATT:

SVAR: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

1.116

a) LÖS $\cos x = \frac{1}{2}$



KOM IHÅG $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ OCH SÅLEDES FÅR VI

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

SVAR: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\arccos\frac{1}{2} = ?$

SVARET GES AV DEN LÖSNING TILL (a) SOM LIGGER I INTERVALLET $[0, \pi]$ (VÄRDEMÄNGDEN TILL arccos), D.V.S:

SVAR: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

KAP. 1.10

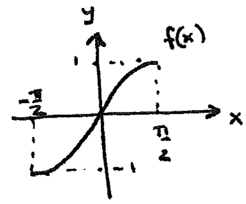
$\boxed{1.122}$

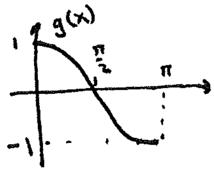
$f(x) := \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$g(x) := \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

$\arcsin y = f^{-1}(y), \quad -1 \le y \le 1$

$\arccos y = g^{-1}(y), \quad -1 \le y \le 1$





BESTÄM arcsin y OCH arccos y OM:

a) $y = 1.$

TÄNK PÅ arc-FUNKTIONERNA SOM INVERSER TILL f OCH g I FIGURERNA. DÅ SER MAN MED EN GÅNG ATT

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos 1 = 0$$

c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

OBS: $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

VILKET GER

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

d) $y = \pi$

FRÅN FIGUR KAN UTLÄSAS ATT arcsin OCH arccos ENDAST ÄR DEFINIERADE FÖR $-1 \le y \le 1$.

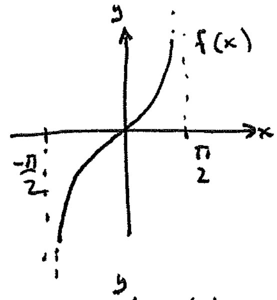
$\boxed{1.123}$

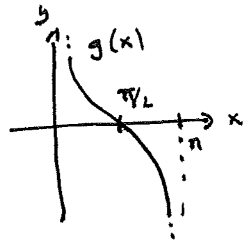
$f(x) := \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$g(x) := \cot x, \quad 0 < x < \pi$

$\arctan y = f^{-1}(y), \quad -\infty < y < \infty$

$\operatorname{arccot} y = g^{-1}(y), \quad -\infty < y < \infty$





BESTÄM $\arctan y$ OCH $\operatorname{arccot} y$ OM:

a) $y = 1$.

D.V.S. SÖK $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ S.A. $\tan x = 1$:

$$1 = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \iff \cos x = \sin x \implies x = \frac{\pi}{4}$$

SÖK $x \in (0, \pi)$ S.A. $\cot x = 1$:

$$1 = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \iff \sin x = \cos x \implies x = \frac{\pi}{4}$$

SVAR: $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$

b) $y = -1$

SÖK $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ S.A. $\tan x = -1$:

$$-1 = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \iff -\cos x = \sin x \implies x = -\frac{\pi}{4}$$

SÖK $x \in (0, \pi)$ S.A. $\cot x = -1$:

$$-1 = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \iff -\sin x = \cos x \implies x = \frac{3\pi}{4}$$

SVAR: $\arctan -1 = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccot} -1 = \frac{3\pi}{4}$

d) $y = 0$

FRÅN FIGUR SER VI DIREKT ATT $\arctan 0 = 0$

OCH $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{1.127}$ VISA ATT: $\arctan \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \arctan \frac{12}{5}$

LÅT $a = \arctan \frac{2}{3}$, $b = \arctan \frac{12}{5}$.

VI VILL VISA ATT $2a = b$.

VI BÖRJAR MED ATT VISA ATT $\tan 2a = \tan b$:

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{2 \sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\tan b = \frac{12}{5}$$

D.V.S. $\tan 2a = \tan b$. (OBS! $\tan(\arctan x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$!)

EFTERSOM ATT $\tan$ ÄR π-PERIODISK MEDFÖR DETTA ATT

$(*) \quad 2a = b + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

(MEN $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ OCH $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (OBS! $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$!))

SÅ $(*)$ MEDFÖR ATT $2a = b$ (k MÅSTE VARA NOLL). □

BÄTTRE ARGUMENT

OBSERVERA ATT $2a = 2 \cdot \arctan \frac{2}{3} < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ OCH $2a > 0$. PÅ SAMMA

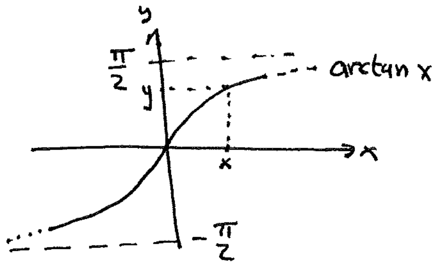
SÄTT INSES ATT $b = \arctan \frac{12}{5} < \frac{\pi}{2}$ OCH $b > 0$.

D.V.S. $|2a - b| < \pi - 0 = \pi$. DEN ENDA MÖJLIGHETEN I $(*)$

ÄR SÅLEDES $k = 0$, TY $|k \cdot \pi| = |2a - b| < \pi$. □

$\boxed{1.128}$ LÅT $y = \arctan x$, VISA ATT

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$



$y = \arctan x \implies \tan y = x, \quad x \in \mathbb{R}$ (SE FIG. →)

SÅLEDES (ENL. DEF. AV tan, OCH ANV. TRIG. ETTAN):

$$x^2 = \tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$$

$$x^2 \cdot \cos^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$(x^2 + 1)\cos^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

VILKET SKULLE VISAS.