E51, 15-17

- KAP. 2.6: KEDJEREGELN, PARTIELLA DERIVATOR

$$0 = M(x,y) + N(x,y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x,y)\right)$$

EXAKT DIFF.EKV. $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (LOKALT) – SATS 2.6.1 (s.96)

IBLAND KAN INTEGRERANDE FAKTOR GE EXAKT DIFF.EKV.

- KAP. 2.8: EXISTENS & ENTYDIGHET, PICARD ITERATION

- KAP. 3.1: HOMOGEN 2:A ORDN. DIFF.EKV. MED KONSTANTA KOEFFICIENTER,
  ANSÄTT $y = e^{rt}$

- KAP. 3.2: EXIST. & ENTYD.

  $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ $\Rightarrow \exists!$ LÖSNING $\phi : I \to \mathbb{R}$

  p, q, g CONT. ON $I \ni t_0$

  FUNDAMENTAL LÖSNING $\{y_1, y_2\}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$ NÅGOT t_0 $\Longleftrightarrow$ $\forall t_0$ (ABELS SATS)

  POÄNG: HITTA TVÅ LÖSN. $\longrightarrow$ ALLA LÖSN. (MED VILLKOR)

- KAP. 3.3: KOMPLEXA RÖTTER TILL KARAKTERISTISKA EKV. $\lambda \pm i\mu$

  GER FUND.LÖSN. $\{e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\sin\mu t\}$

- KAP. 3.4: DUBBELRÖTTER TILL KAR.EKV. r, FUND.LÖSN. $\{e^{rt}, te^{rt}\}$

  REDUCERING AV ORDNING: GIVET EN LÖSN. $y_1(t)$, ANSÄTT $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ FÖR ATT HITTA ALLA LÖSN.

- KAP. 3.5: LÖSN. TILL ICKE-HOMOGEN GES AV $\overbrace{c_1y_1 + c_2y_2}^{\text{HOMOGEN LÖSN}} + \underset{\text{PARTIKULÄRLÖSN}}{P}$ (s. 181)

LÖS: 2.6.4, 3.1.21, 3.2.21, 3.4.23

3.3.10

ÖVN.: 2.6.1

$\boxed{X.1.6}$

FÖR VILKA x_0, y_0 GARANTERAR SATS 1 ATT DET EXISTERAR EN UNIK LÖSN. TILL

$$\begin{cases} \phi'(x) = f(x, \phi(x)) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PÅ ETT INTERVALL $(x_0 - h, x_0 + h)$ FÖR NGT. $h > 0$?

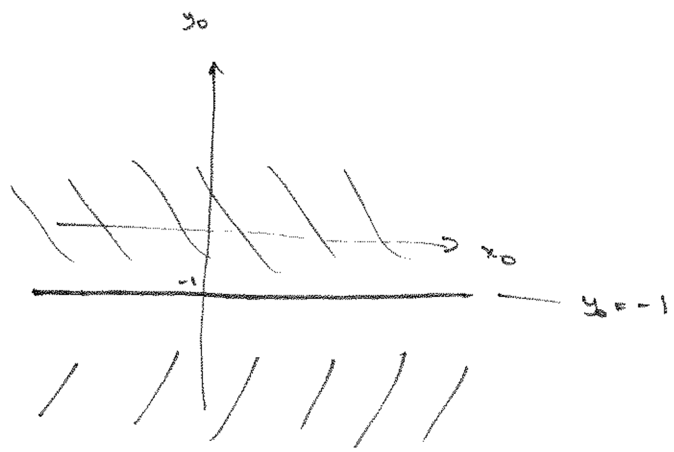
SÖK VAR f OCH $\frac{\partial f}{\partial y}$ ÄR KONT. :

$$f(x,y) = \frac{x}{1+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(1+y^3)^2} \cdot 3y^2$$

OBS ATT BÅDA FUNKTIONER ÄR DEF. ÖVERALLT UTOM $y = -1$.
DETTA GER ÄVEN VAR DE ÄR KONTINUERLIGA, SÅ :

<u>SVAR</u>: ALLA x_0, $y_0 \neq -1$.



$\boxed{2.6.1}$ ÄR DIFF. EKV. EXAKT? LÖSNING?

$$\underbrace{(4x+3)}_{M} + \underbrace{(6y-1)}_{N} y' = 0$$

OM EXAKT SÅ GÄLLER $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ SAMMA!}$$

JA, D.E. ÄR EXAKT. SÖK $\psi(x,y)$ S.A. $M = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$, $N = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$. VILKET GER:

$$\psi(x,y) = \int (4x+3)\,dx + h(y) = 2x^2 + 3x + h(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = h'(y) = 6y - 1 \implies h(y) = 3y^2 - y$$

D.V.S. EN LÖSNING ÄR

$$\psi(x,y) = 2x^2 + 3x + 3y^2 - y$$

NU VET VI ATT DEN URSPRUNGLIGA D.E. KAN SKRIVAS:

$$0 = M + Ny' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot y' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x,y)\right)$$

D.V.S. LÖSNINGEN GES AV

$$\psi(x,y) = c \leftarrow \text{KONSTANT}$$

SVAR: $2x^2 + 3x + 3y^2 - y = c$

$\boxed{2.6.4}$ ÄR EKV. EXAKT ? LÖSNING?

$$\underbrace{(4xy^2+4y)}_{M(x,y)} + \underbrace{(4x^2y+4x)}_{N(x,y)}y' = 0$$

EXAKT $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy+4 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy+4$$

JA, EKV. ÄR EXAKT. SÖK ψ S.A. $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$:

$$\psi(x,y) = \int (4xy^2+4y)\,dx + h(y) = 2(xy)^2 + 4xy + h(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 4x^2y + 4x + h'(y)$$

$$\parallel$$

$$4x^2y+4x$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0$$

EN LÖSN. ÄR SÅLEDES $\psi(x,y) = 2(xy)^2 + 4xy$.

VI HAR VALT ψ S.A.

$$0 = M + N\cdot y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot y' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x,y)\right)$$

SÅ LÖSN. AV D.E. GES AV

$$\psi(x,y) = c$$ KONST.

SVAR: $2xy\cdot(xy+2) = c$

$\boxed{2.6.18}$ VISA ATT EN SEPARABEL EKV. $M(x)+N(y)y'=0$

ÄR EXAKT.

EKV. ÄR EXAKT OMM $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. EFTERSOM M ÄR OBEROENDE AV y OCH N ÄR OBEROENDE AV x FÖR EN SEPARABEL EKV. FÅR VI:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial x}$$

D.V.S SEPARABEL $\Longrightarrow$ EXAKT

$\boxed{3.1.21}$ LÖS B.V.P. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 2.$

BESTÄM α SÅ $y(t) \to 0$ DÅ $t \to \infty$.

ANSÄTT $y = e^{rt}$:

$$0 = y'' - y' - 2y = r^2 e^{rt} - re^{rt} - 2e^{rt} = (r^2 - r - 2)e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow 0 = r^2 - r - 2 = \left(r - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 2 = \left(r - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

FUNDAMENTAL LÖSN. ÄR $y_1 = e^{2t}$, $y_2 = e^{-t}$. ALLMÄN LÖSN.

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

ANVÄND B.V.:

$$\alpha = y(0) = c_1 + c_2$$

$$2 = y'(0) = 2c_1 - c_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + 2 = (c_1 + c_2) + (2c_1 - c_2) = 3c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\alpha+2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = 2c_1 - 2 = 2\frac{\alpha+2}{3} - 2 = \frac{2\alpha + 4 - 6}{3} = \frac{2\alpha - 2}{3}$$

LÖSNING TILL B.V.P.:

$$y(t) = \frac{\alpha+2}{3} \cdot e^{2t} + \frac{2\alpha - 2}{3} \cdot e^{-t}$$

OBS. ATT FÖRSTA TERMEN $\to \infty$ OM $\alpha \neq -2$. DVS OM $y \to 0$ SÅ MÅSTE $\alpha = -2$.

<u>SVAR</u>: $\begin{cases} y(t) = \dfrac{\alpha+2}{3} e^{2t} + \dfrac{2\alpha-2}{3} e^{-t} \\ \alpha = -2 \end{cases}$

$\boxed{3.2.21}$ ANTAG ATT $\{y_1, y_2\}$ ÄR FUNDAMENTALLÖSN. TILL
$y'' + p(t)y' + q(t)\cdot y = 0$. LÅT $y_3 = a_1 y_1 + a_2 y_2$, $y_4 = b_1 y_1 + b_2 y_2$ FÖR
GODTYCKLIGA KONST. a_1, a_2, b_1, b_2.
ÄR $\{y_3, y_4\}$ OCKSÅ FUNDAMENTALLÖSN. ?

ENL. SATS ÄR $\{y_3, y_4\}$ FUNDAMENTALLÖSN. OMM $\exists t_0$ S.A.

$$W = \begin{vmatrix} y_3(t_0) & y_4(t_0) \\ y_3'(t_0) & y_4'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

BERÄKNA DETERMINANTEN:

$$W = \begin{vmatrix} (a_1 y_1 + a_2 y_2) & (b_1 y_1 + b_2 y_2) \\ (a_1 y_1' + a_2 y_2') & (b_1 y_1' + b_2 y_2') \end{vmatrix} = (a_1 y_1 + a_2 y_2)(b_1 y_1' + b_2 y_2') - (b_1 y_1 + b_2 y_2)(a_1 y_1' + a_2 y_2')$$

$$= y_1 y_1' \cdot \overbrace{(a_1 b_1 - a_1 b_1)}^{=0} + y_1 y_2' \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) + y_2 y_1' \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2) + y_2 y_2' \cdot \overbrace{(a_2 b_2 - a_2 b_2)}^{=0}$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (y_1 y_2' - y_2 y_1') = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{\tilde{W}}$$

OBS $\tilde{W}(t_0) \neq 0$ NGT t_0, TY $\{y_1, y_2\}$ ÄR GIVEN FUNDAMENTALLÖSN.

DVS $W(t_0) \neq 0$ OM $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

OMVÄNT, OM $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ SÅ $W(t) = 0$, $\forall t$.

__SVAR__: $\{y_3, y_4\}$ ÄR FUNDAMENTALLÖSN. __OMM__ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

$\boxed{3.3.10}$ HITTA ALLMÄN LÖSN. TILL $y'' + 4y' + 5y = 0$.

ANSÄTT $y = e^{rt}$:

$$0 = r^2 e^{rt} + 4re^{rt} + 5e^{rt} = (r^2 + 4r + 5)e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = r^2 + 4r + 5 = (r+2)^2 - 4 + 5 = (r+2)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad r = -2 \pm i$$

FUNDAMENTALLÖSN. $y_1 = e^{-2t} \cdot \cos t \,, \quad y_2 = e^{-2t} \cdot \sin t$

<u>SVAR:</u> $y(t) = e^{-2t} \cdot (c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t)$

3.4.23

ANVÄND METODEN FÖR REDUCERING AV ORDNING FÖR ATT LÖSA

$$(*) \qquad t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0, \qquad t > 0$$

GIVET ATT $y_1(t) = t^3$ ÄR EN LÖSNING.

ANSÄTT $y_2(t) = v(t) \cdot y_1(t)$. DÅ

$$y_2' = v'y_1 + vy_1' \qquad y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

SÄTT IN I $(*)$:

$$0 = t^2 \cdot (v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') - 4t \cdot (v'y_1 + vy_1') + 6vy_1$$

$$= v'' \cdot (t^2 y_1) + v' \cdot (2t^2 y_1' - 4ty_1) + v \cdot (\underbrace{t^2 y_1'' - 4ty_1' + 6y_1}_{=0 \text{ TY } y_1 \text{ LÖSER } (*)})$$

$$= t^5 \cdot v'' + (6t^4 - 4t^4) \cdot v' = t^5 \cdot v'' + 2t^4 \cdot v'$$

LÖS DENNA EKV.

$$t^5 v'' + 2t^4 v' = 0 \overset{(t>0)}{\iff} \frac{v''}{v'} = -\frac{2t^4}{t^5} = -\frac{2}{t}$$

$$\frac{v''}{v'} = (\ln v')' \qquad (\text{ANTAG } v' > 0)$$

$$\Rightarrow \ln v' = \int -\frac{2}{t} dt = -2 \cdot \ln t = \ln t^{-2} \quad (>0!)$$

$$\Rightarrow v' = t^{-2} \Rightarrow v = -t^{-1}$$

D.V.S. $y_2(t) = -t^{-1} \cdot t^3 = -t^2$.

SVAR: $y_2(t) = -t^2$

KONTROLL:

$$y_2 = -t^2, \quad y_2' = -2t, \quad y_2'' = -2$$

$$t^2 y_2'' - 4t y_2' + 6y_2 = -2t^2 + 8t^2 - 6t^2 = 0 \quad \underline{\text{OK}}$$

OBS: $\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ y_2' & y_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t^2 & t^3 \\ -2t & 3t^2 \end{vmatrix} = -3t^4 + 2t^4 = -t^4 > 0 \Rightarrow \{y_1, y_2\}$ FUNDAMENTAL LÖSN.