$\boxed{3.6.13}$ HITTA PARTIKULÄRLÖSN. GIVET FUNDAMENTALLÖSN. $\{y_1, y_2\}$ TILL

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2y = 4t^2 - 3, & t > 0 \\ y_1 = t^2, \quad y_2 = t^{-1} \end{cases}$$

KONTROLL ATT $\{y_1, y_2\}$ ÄR FUNDLÖSN.:

$$y_1' = 2t, \quad y_1'' = 2, \quad y_2' = -t^{-2}, \quad y_2'' = 2t^{-3}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = t^2 \cdot (-t^{-2}) - t^{-1} \cdot 2t = -1 - 2 = -3 \neq 0 \quad \text{OK}$$

$\{y_1, y_2\}$ ÄR FUND.LÖSN.

$t^2 \cdot 2 - 2 \cdot t^2 = 0$ OK

$t^2(2t^{-3}) - 2 \cdot t^{-1} = 0$ OK

y_1 OCH y_2 LÖSER DEN HOMOGENA D.E.

ANVÄND METODEN FÖR VARIATION AV PARAMETRAR FÖR ATT HITTA PARTIKULÄRLÖSNING. ANSÄTT $y(t) = f(t)y_1(t) + g(t)y_2(t)$:

$$y' = f'y_1 + fy_1' + g'y_2 + gy_2'$$

KRÄV: $\quad f'y_1 + g'y_2 = 0 \qquad (*)$

$$y'' = f'y_1' + fy_1'' + g'y_2' + gy_2''$$

SÄTT IN I D.E.

$$4t^2 - 3 = t^2 \cdot (f'y_1' + fy_1'' + g'y_2' + gy_2'') - 2 \cdot (fy_1 + gy_2)$$

$$= f \cdot \underbrace{(t^2 y_1'' - 2y_1)}_{=0} + g \cdot \underbrace{(t^2 y_2'' - 2y_2)}_{=0} + t^2 \cdot (f'y_1' + g'y_2') \qquad (**)$$

(*) OCH (**) GER:

$$g' = -f' \cdot \frac{y_1}{y_2} \qquad (\text{OBS! } y_2 > 0!)$$

$$f' = \frac{4t^2-3}{t^2} \cdot \left(y_1' - \frac{y_1 y_2'}{y_2}\right)^{-1} = \frac{4t^2-3}{t^2} \cdot \frac{y_2}{y_1'y_2 - y_1 y_2'} = \frac{4t^2-3}{t^2} \cdot \frac{t^{-1}}{2+1} = \frac{4t^2-3}{3t^3}$$

$$\Longrightarrow f = \int \frac{4t^2-3}{3t^2}\,dt = \frac{4}{3}\log t + \frac{1}{2t^2}\ ; \quad g = -\int \frac{4t^2-3}{3}\,dt = -\frac{4}{9}t^3 + t$$

PARTIKULÄRLÖSN.

$$y = fy_1 + gy_2 = \left(\frac{4}{3}\log t + \frac{1}{2t^2}\right)t^2 + \left(-\frac{4}{9}t^3 + t\right)t^{-1} = \boxed{\frac{4}{3}t^2\log t + \frac{3}{2} - \frac{4}{9}t^2}$$

(OBS ATT $y = -\frac{4}{9}t^2$ LÖSER HOMOGENA D.E. SÅ DEN TERMEN KAN TAS BORT FRÅN PARTIKULÄRLÖSNINGEN.)

KS 2013-09-26

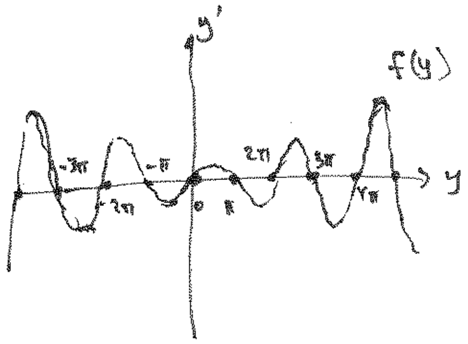
1. $y' = f(y) = \sin y \cdot e^{y^2}, \qquad y(3) = 1$

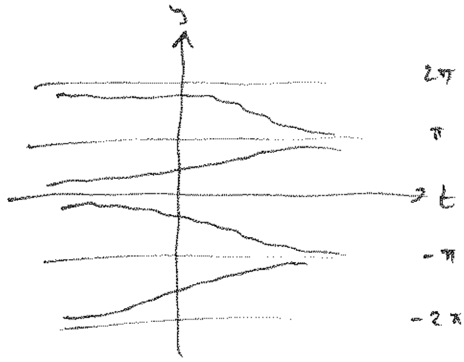
ϕ ÄR GIVEN ENTYDIG LÖSNING. BESTÄM $\lim_{t\to\infty} \phi(t)$.

AUTONOM DIFF.EKV. SÖK KRITISKA PUNKTER, DVS LÖSN. TILL $f(y) = 0$.

$$f(y) = 0 \iff \sin y = 0 \qquad (\text{TY } e^x > 0, \forall x)$$

$$\iff y = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$





OBS! $f(y) > 0$ OM $2k\pi < y < (2k+1)\pi$

$f(y) < 0$ OM $(2k-1)\pi < y < 2k\pi$

SÅ $y = 2k\pi$ ÄR REPELLERANDE (INSTABILA) OCH $y = (2k+1)\pi$ ÄR ATTRAHERANDE (STABILA) STATIONÄRA LÖSNINGAR.

B.V. $\phi(3) = 1$ GER SÅLEDES ATT $0 < \phi(t) < \pi$, $\forall t$, EFTERSOM $\phi(t)$ INTE KAN KORSA EN STATIONÄR LÖSNING.

VIDARE SÅ MÅSTE $\phi(t) \to \pi$ DÅ $t \to \infty$, EFTERSOM $y = \pi$ ÄR ATTRAHERANDE; OCH $\phi(t) \to 0$ DÅ $t \to -\infty$, EFTERSOM $y = 0$ ÄR REPELLERANDE.

VARFÖR KAN INTE $\phi(t) \to r < \pi$? ANTAG ATT $\phi(t) \to r < \pi$ DÅ $t \to \infty$.

TA $t_0 >> 1$. LÅT $\rho = \min_{\phi(t_0) \le y \le r} f(y)$. DÅ ÄR $\rho > 0$.

MEDELVÄRDESSATSEN GER ATT $\exists\, t_n \in [0, n]$ S.A. $\phi(t_0 + n) = \phi(t_0) + \phi'(t_n) \cdot n$

MEN $\phi'(t_n) \ge \rho > 0$ SÅ DET GER $\phi(t_0 + n) > \phi(t_0) + \rho \cdot n \to \infty$

VILKET ÄR OMÖJLIGT (TY $y = \pi$ ÄR STAT. LÖSN.). SÅLEDES KAN INTE $\phi(t) \to r < \pi$ DÅ $t \to \infty$.

KS 2013-09-26

(3) a) ALLA PUNKTER ÄR REGULJÄRA TY EKV. KAN SKRIVAS

$$y'' + p(t)y' - q(t)y = 0$$

DÄR p, q ÄR ANALYTISKA. SÅLEDES HAR SERIEN OÄNDLIG KONV. RADIE.

b) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$$y'' - 2ty' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\rightarrow 0 = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2 n a_n - 2a_n\} t^n$$

REKURSIONSRELATIONEN ÄR

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} - 2 n a_n - 2a_n = 0$$

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} - 2(n+1) a_n = 0 \longrightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}}$$

c) B.V.: $1 = y(0) = a_0$, $\quad 0 = y'(0) = a_1$

RR: $0 = 2a_2 - 2a_0 = 2a_2 - 2 \longrightarrow a_2 = 1$

$0 = 2 \cdot 3 \cdot a_3 - 2a_1 - 2a_1 = 6a_3 \longrightarrow a_3 = 0$

SER ATT $a_{2k+1} = 0$, $\forall k \geq 0$.

$$(a_0, a_2, a_4, \dots) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \dots\right)$$

SER ATT $a_{2k} = \frac{1}{k!}$, $k \geq 0$ $\quad (0! = 1! = 1)$

SÅ $$y = \sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2}$$

(KONTROLLERA ATT $y = e^{t^2}$ LÖSER DIFF. EKV.!)