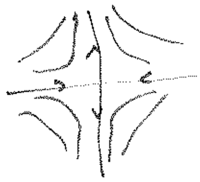
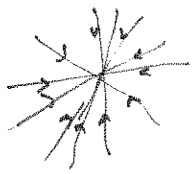
$\bar{x}' = F(\bar{x})$ AUTONOM $\overset{\text{LINJÄR}}{\vee}$ D.E.

- KRITISKA PUNKTER $\bar{x}$ S.A. $F(\bar{x}) = 0$
- JACOBIMATRIS: DF

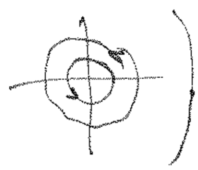
$$F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} \qquad DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

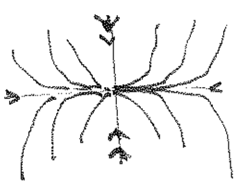
- STABILITET FÖR $\overset{\text{(HYPERBOLISK)}}{\vee}$ KRITISK PUNKT $\overset{\bar{c}}{\vee}$ $\longleftrightarrow$ STABILITET FÖR $DF(\bar{c})$
(HARTMAN-GROBMAN)
- STABIL, ASYMPTOTISK STABIL, INSTABIL
-

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$ 

STABIL (EJ ASYMPT.) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 

TEN. 2013-10-25

(5) $\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = -y - xy^2 \end{cases}$

a) KRITISKA PUNKTER? STABILITET?

$\begin{cases} 0 = x + y^2 \\ 0 = -y - xy^2 \end{cases}$ $\quad x = -y^2$, $\quad 0 = -y + y^4 = y(y^3 - 1) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

KRITISKA PUNKTER ÄR $(0,0)$ OCH $(-1,1)$.

LINJÄRISERA KRING KRITISKA PUNKTER. JACOBIMATRISEN ÄR:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ -y^2 & -1-2x \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ EGENVÄRDEN 1 OCH -1
D.V.S. $(0,0)$ ÄR INSTABIL, TY ETT EGENVÄRDE ÄR POSITIVT.

$$J(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EGENV. $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 2 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm i\sqrt{2}$
$\Rightarrow \lambda = 1 \pm i\sqrt{2}$

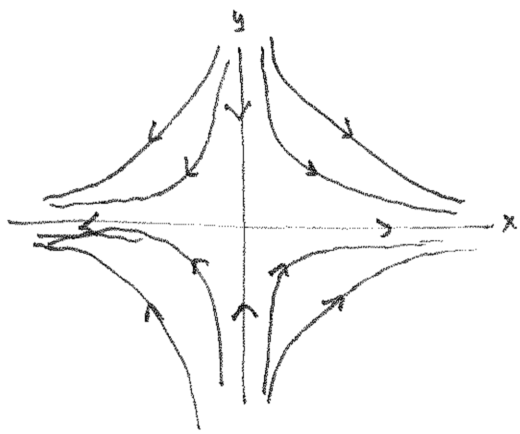
D.V.S. $(-1,1)$ ÄR INSTABIL, TY $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

b) FASPORTRÄTT FÖR LINJÄRA SYSTEMET KRING $(0,0)$.

SYSTEMET ÄR $\longleftarrow$ OBS! DIAGONALT SÅ EGENVEKTORER GES AV KOLONNERNA!

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LÖSN. $(x,y) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



③ a) $\bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \bar{x}, \qquad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

SÖK EGENVÄRDEN (TILL A):

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (3-\lambda)(-\lambda-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

SÖK EGEN~~KOORDINATER~~ VEKTORER:

$$(A - \lambda_1 I)\bar{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 2x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ EN EGENVEKTOR ÄR $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda_2 I)\bar{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

EN EGENVEKTOR ÄR $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

VI HAR LÖSNINGARNA

$$\bar{x}_1 = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

KONTROLL:

$$\overset{\text{ok!}}{=} \begin{cases} \bar{x}_1' = 3e^{3t} \cdot \bar{v}_1 \\ A\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e^{3t}\bar{v}_1 \end{cases}$$

$$\overset{\text{ok!}}{=} \begin{cases} \bar{x}_2' = -e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e^{-t} \cdot \bar{v}_2 \\ A\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -e^{-t} \cdot \bar{v}_2 \end{cases}$$

ANVÄND B.V.:

$\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$ ALLMÄN LÖSN.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2c_1 = 2 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\text{SVAR: } \bar{x} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

TEN. 2013-10-25

(3) b) $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ $\quad \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ LÖSNINGAR TILL $\bar{x}' = A\bar{x}$

BILDA FUNDAMENTALMATRIS

$$\Psi(t) = [\bar{x}^{(1)} \ \bar{x}^{(2)}] = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

OBS

(1) $A\Psi(t) = [A\bar{x}^{(1)} \ A\bar{x}^{(2)}] = [\bar{x}^{(1)\prime} \ \bar{x}^{(2)\prime}] = [\bar{x}^{(1)} \ \bar{x}^{(2)}]' = \Psi'(t)$

SÖK PARTIKULÄRLÖSNING TILL

(2) $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{g}$, $\quad \bar{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

ANSÄTT $\bar{x} = \Psi\bar{u}$, DERIVERA OCH ANVÄND (1) & (2):

$$\bar{x}'(t) = \Psi'(t)\bar{u}(t) + \Psi(t)\bar{u}'(t)$$

$$\| $$

$$A\bar{x}(t) + \bar{g}(t) = A\Psi(t)\bar{u}(t) + \bar{g}(t) = \Psi'(t)\bar{u}(t) + \bar{g}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(t)\bar{u}'(t) = \bar{g}(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\bar{g}(t) \qquad (3)$$

ANVÄND ATT:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

DETTA GER

$$\Psi^{-1}(t) = \left(e^{3t}(-e^{-t}) - e^{-t} \cdot e^{3t}\right)^{-1} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = -(2e^{2t})^{-1} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

(3) BLIR SÅLEDES

$$\bar{u}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-4t} - e^{-4t} \\ e^{0} + e^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \bar{c}, \quad \text{VÄLJ} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PARTIKULÄRLÖSNING:

$$\| \quad \bar{x}_p = \Psi\bar{u} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix} \quad \|$$

SVAR: ALLMÄN LÖSNING TILL (2) ÄR: $\bar{x} = \Psi\bar{c} + \bar{x}_p$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ GODTYCKLIG KONSTANT.