9.1 : 3, 4, 14, 16 ES1 15–17

9.2 : 6, 7, 13, 17, 18, 22*, 28*

9.3 : 5, 12, 13, 14, 20, 21, 26

9.4 : 2, 4

9.5 : 2, 4

9.6 : 1, 4, 6

**SATS** (HARTMAN-GROBMAN): ANTAG ATT $\bar{x}_0$ ÄR EN HYPERBOLISK KRITISK PUNKT

(9.3.2) TILL $\bar{x}' = F(\bar{x})$, ~~[illegible]~~ OCH $F$ ÄR LOKALT LINJÄR.

(s.523) ~~OMM [illegible] IMAG HYPERBOLISK~~

DÅ ÄR $\bar{x}_0$ ASYMPT. STABIL FÖR $F$ $\iff$ $\bar{x}_0$ ÄR ASYMPT. STABIL FÖR DET LINJÄRISERADE SYSTEMET KRING $\bar{x}_0$

(OCH SÅLEDES $\bar{x}_0$ INSTABIL FÖR $F \iff \bar{x}_0$ INSTABIL FÖR LINJ. SYS. KRING $\bar{x}_0$)

**OBS**: OM $DF(\bar{x}_0)$ HAR EGENVÄRDEN S.A. ~~[illegible]~~ $\operatorname{Re}\lambda = 0$ SÅ SÄGER SATSEN INGET OM STABILITETEN.

**DEF.** (1) $\bar{x}_0$ ÄR <u>STABIL</u> <u>OMM</u> $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: ALLA LÖSN. $\bar{\phi}(t)$ S.A. $\|\bar{\phi}(0) - \bar{x}_0\| < \delta$ ÄR DEF. FÖR ALLA $t > 0$ OCH $\|\bar{\phi}(t) - \bar{x}_0\| < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$.

(2) $\bar{x}_0$ ÄR <u>ASYMPTOTISKT STABIL</u> OMM $\bar{x}_0$ ÄR STABIL OCH $\exists \delta_0 > 0$: ALLA LÖSN. $\bar{\phi}(t)$ S.A. $\|\bar{\phi}(0) - \bar{x}_0\| < \delta_0$ UPPFYLLER $\bar{\phi}(t) \to \bar{x}_0$ DÅ $t \to \infty$

$$\left( \forall \varepsilon \exists \delta : \left.\begin{array}{l} F(\bar{x}_0) = 0 \\ \bar{\phi}'(t) = F(\bar{\phi}(t)), \\ \|\bar{\phi}(0) - \bar{x}_0\| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \|\bar{\phi}(t) - \bar{x}_0\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \text{ (STABIL)} \\ \text{OCH} \\ \Rightarrow \|\bar{\phi}(t) - \bar{x}_0\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \text{(ASYMPT. STABIL)} \end{array} \right)$$

$\boxed{9.3.20}$
(1/3)

LÅT
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + x^3 \end{cases}$$

a) VISA ATT (0,0) ÄR EN SADELPUNKT.

SKRIV OM $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = F(x,y) = (x, -2y + x^3)$.

VI SER ATT $F(0,0) = (0,0)$, D.V.S. (0,0) ÄR EN KRITISK PUNKT.

JACOBIANEN ÄR

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3x^2 & -2 \end{pmatrix}$$

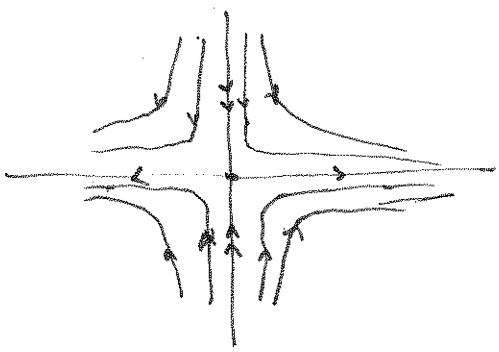
$$\Rightarrow DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

EGENVÄRDENA KAN LÄSAS AV FRÅN DIAGONALEN, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

D.V.S. (0,0) ÄR EN SADELPUNKT $\wedge$ TY $\lambda_1 > 0$ OCH $\lambda_2 < 0$.
(ENLIGT HARTMAN-GROBMAN)

b) SKISSA BANOR FÖR DET LINJÄRISERADE SYSTEMET KRING (0,0).
VISA ATT BANAN DÄR $(x,y) \to (0,0)$ GES AV $x = 0$.

EGENVEKTORER KAN TAS SOM KOLONNERNA AV (*); SKALA OM FÖR ATT FÅ $\bar{v}_1 = (1,0)$, $\bar{v}_2 = (0,1)$. ALLA PUNKTER UTANFÖR LINJEN $t \mapsto t \cdot \bar{v}_2$ KOMMER ATT $\to \infty$ (TY EGENVÄRDET $\lambda_2 < 0$). ~~[illegible]~~ ORIGO, ALLA ANDRA $\to \infty$.
D.V.S. BANAN $x = 0$ GÅR MOT ORIGO



9.3.20

(2/3)

c) BESTÄM BANOR FÖR $x \neq 0$. VISA ATT BANAN ~~MOTS~~ MOTSVARANDE $x=0$ ÄR SAMMA SOM FÖR DET LINJÄRA SYSTEMET, MEN BANAN ~~MOTS~~ MOTSVARANDE $y=0$ GES AV $y = x^3/5$. SKISSA BANOR.

ANTAG FÖRST $x \neq 0$. DÅ GÄLLER

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x^3 - 2y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{dy}{dx} + 2y - x^3 = 0 \qquad (+)$$

SKRIV SOM $M(x,y) + N(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, $M = 2y - x^3$, $N = x$.

OBS ATT SYSTEMET EJ ÄR EXAKT, TY $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$.

DOCK KAN VI SÖKA INTEGRERANDE FAKTOR $\mu$ SOM GÖR SYSTEMET EXAKT.

FRÅN S. 99 FÅR VI

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \mu = \frac{\mu}{x}$$

EN LÖSN. ÄR $\mu(x) = x$ (TESTA!). D.V.S. FÖLJANDE SYSTEM ÄR EXAKT

$$2xy - x^4 + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

SÖK $\psi(x,y)$ S.A.

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2xy - x^4 & (1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \psi(x,y) = x^2 y + h(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2xy + h'(x) \quad (2)$$

$(1)+(2) \Rightarrow h'(x) = -x^4$. T.EX. $h(x) = -\frac{x^5}{5}$.

ETT MÖJLIGT VAL ÄR SÅLEDES $\psi(x,y) = x^2 y - \frac{x^5}{5}$.

VI HAR ATT KURVORNA $\psi(x,y) = c$, FÖR $c \in \mathbb{R}$, ÄR BANOR TILL $(+)$ TY:

$$\frac{d}{dx}\left(\psi(x, y(x))\right) = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2xy - x^4 + x^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

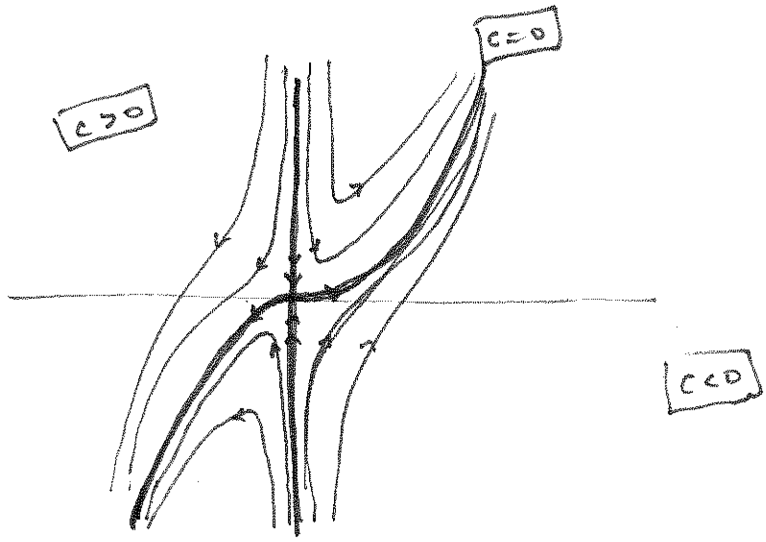
$$\overset{(x \neq 0)}{\Rightarrow} \quad 2y - x^3 + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

9.3.20
(3/3)

c) BANOR TILL SYSTEMET ~~XXX~~ $\psi(x,y)=c$ KAN SKRIVAS

$$y = \frac{c}{x^2} + \frac{x^3}{5} \qquad (x \neq 0)$$

DEN FÖRSTA TERMEN HAR SAMMA TECKEN SOM C. FÖR X NÄRA 0 KOMMER DENNA TERM ATT DOMINERA. FÖR $|x| >> 0$ KOMMER DEN ANDRA TERMEN ATT DOMINERA. RIKTNINGEN PÅ BANORNA FÅR VI FRÅN DET LINJÄRISERADE SYSTEMET.




OM $x=0$ ÄR SYSTEMET $(x', y') = (0, -2y)$ SOM HAR LÖSNING $(x,y) = (0, c \cdot e^{-2t})$. D.V.S. BANAN SOM GES AV $x=0$. DETTA ÄR SAMMA SOM FÖR DET LINJÄRISERADE SYSTEMET.

BANAN MOTSVARANDE $y=0$ FÖR DET LINJÄRISERADE SYSTEMET MÅSTE GÅ GENOM ORIGO. DET ENDA ALTERNATIVET ÄR $\psi(x,y)=0$, D.V.S. $y = x^3/5$.

$\boxed{9.3.26}$ BETRAKTA SYSTEMEN

$$① \begin{cases} x' = y + x\cdot(x^2+y^2) \\ y' = -x + y\cdot(x^2+y^2) \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x' = y - x\cdot(x^2+y^2) \\ y' = -x - y\cdot(x^2+y^2) \end{cases}$$

a) VISA ATT (0,0) ÄR KRITISK PUNKT TILL ① OCH ②.

OBS. ATT SYSTEMEN KAN SKRIVAS

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm h(x,y)$$

DÄR

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h(x,y) = \begin{pmatrix} x\cdot(x^2+y^2) \\ y\cdot(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

DÅ $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm h(0,0) = 0$ SER VI ATT (0,0) ÄR KRIT. PKT.

b) VISA ATT SYSTEMEN ÄR LOKALT LINJÄRA.

$\|h(x,y)\| / \|(x,y)\| \to 0$ DÅ $(x,y)\to 0$.

D.V.S. VI MÅSTE VISA ATT

$$\frac{\|h(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} = \frac{x^2(x^2+y^2)^2 + y^2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^2 \to 0 \qquad \text{V.S.V.}$$

c) INFÖR POLÄRA KOORD.; VISA ATT $r\to 0$ DÅ $t\to\infty$ FÖR ② SÅ (0,0) ÄR ASYMPT. STABIL. VISA ATT (0,0) ÄR INSTABIL FÖR ①.

LÅT $r^2 = x^2+y^2$ (POLÄRA KOORD.), DÅ ÄR $2r\cdot r' = 2x\cdot x' + 2y\cdot y'$

I FALLET ②:

$$r\cdot r' = xx' + yy' = \cancel{xy} - x^2r^2 - \cancel{xy} - y^2r^2 = -r^2(x^2+y^2) = -r^4 \Rightarrow r' = -r^3$$

D.V.S. $r' < 0$ SÅ $r\to 0$ DÅ $t\to\infty$. D.V.S. (0,0) ÄR ASYMPT. STABIL.

I FALLET ①:

$$r\cdot r' = xx' + yy' = \cancel{xy} + x^2r^2 - \cancel{xy} + y^2r^2 = r^4 \Rightarrow r' = r^3$$

$$\Rightarrow \int\frac{dr}{r^3} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{2r^2} = t + c \Rightarrow r^2 = -\frac{1}{2(t+c)}$$

LÅT $r(0) = r_0$. DÅ

$$r_0^2 = -\frac{1}{2c} \Rightarrow c = -\frac{1}{2r_0^2} \Rightarrow r^2 = -\frac{1}{2(t-\frac{1}{2r_0^2})}$$

D.V.S. $r^2$ ÄR OBEGRÄNSAD DÅ $t \nearrow \frac{1}{2r_0^2}$ SÅ (0,0) ÄR INTE STABIL.