9.6 : 1, 4, 6 　　　　13-16 　　M35

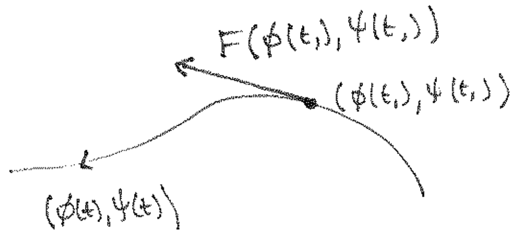
LYAPUNOVFUNKTION: $V(x,y)$ S.A. $V(0,0)=0$, $V(x,y)>0$ $(x,y)\neq 0$.

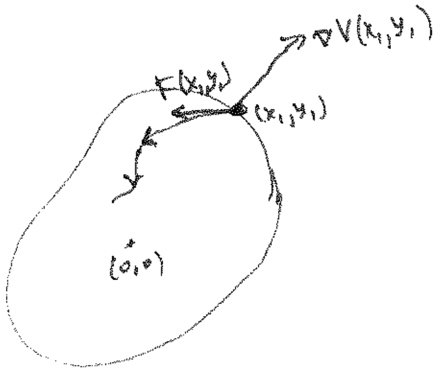
TÄNK PÅ V SOM ETT "AVSTÅND" TILL ORIGO, ELLER "HÖJD" OVAN $(0,0)$.

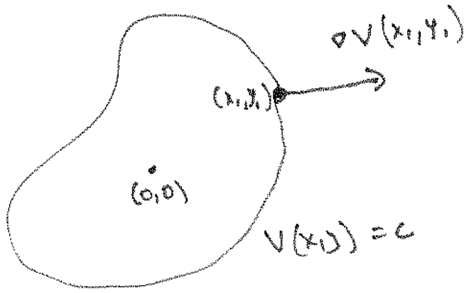
LÅT $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ LÖSA $\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = F(x,y)$

DÅ $\frac{d}{dt}\Big(V(\phi(t),\psi(t))\Big) = \frac{\partial V}{\partial x}(\phi(t),\psi(t))\cdot\frac{d\phi}{dt}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\phi(t),\psi(t))\cdot\frac{d\psi}{dt}(t)$

$\dot{V}(\phi(t),\psi(t)) = \nabla V(\phi(t),\psi(t))\bullet F(\phi(t),\psi(t))$







SATS: $\begin{cases} \dot{V} < 0 \Rightarrow \text{ASYMPT. STABIL} \\ \dot{V} \leq 0 \Rightarrow \text{STABIL} \end{cases}$

SATS: $\dot{V}>0$ OCH $V(x_n,y_n)>0$ FÖR $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$

$\Rightarrow$ INSTABIL

- 1:A ORDN. LINJÄR → INTEGRERANDE FAKTOR (PRODUKTREGELN FÖR DERIV.)
- 1:A ORDN. SEPARABEL → $f(y)y' = g(x)$ → $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$
- 1:A ORDN. EXAKT → $\frac{d}{dx}\left(\psi(x, y(x))\right) = 0$ (KEDJEREGELN, BLANDADE PARTIALDER. AV ORDN. 2 LIKA)
- EXISTENS & ENTYDIGHET FÖR 1:A ORDN. SYSTEM: SATS 7.1.2, S.363 (LINJ.), SATS 7.1.1, S.362 (ICKELINJ.)
- 1:A ORDN. SYS., FUNDAMENTAL LÖSNINGSMÄNGD: SATS 7.4.2, S.392
- 1:A ORDN. SYS., AUTONOMA LINJÄRA SYS.: OLIKA FALL BER. PÅ EGENVÄRDEN/EGENVEKTORER
  KAP. 7.5, 7.6, 7.8 (HOMOGENA)
  KAP. 7.9 (ICKE-HOMOGENA) (VARIATION AV PARAMETRAR) S.443
- STABILITET FÖR LINJÄRA AUTONOMA SYSTEM, KAP. 9.1; LINJÄRISERBARA SYS., KAP. 9.3 (HARTMAN–GROBMANS SATS S.523)
- LYAPUNOVS STABILITETSKRITERIER, KAP. 9.6
- 2:A ORDN.: REDUKTION AV ORDNING, KAP 3.4; VARIATION AV PARAMETRAR, KAP. 3.6
- 2:A ORDN. SERIELÖSNINGAR: REGULJÄR PUNKT, KAP. 5.2 & 5.3, KONV.RADIE FÖR LÖSN. SATS 5.3.1 S. 266; REGULJÄR SINGULÄR PUNKT, KAP. 5.5+5.6
- LAPLACETRANSFORM, KAP. 6

$\boxed{9.6.1}$ AVGÖR STABILITET FÖR KRITISKA PUNKTEN (0,0) OM

$$\begin{cases} x' = -x^3 + 2xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases}$$

KONTROLLERA FÖRST ATT (0,0) ÄR KRITISK (TRIVIALT)!

FÖRSÖK LINJÄRISERA KRING (0,0). JACOBIANEN

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2+2y^2 & 4xy \\ -4xy & -2x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DET LINJÄRISERADE SYSTEMET ÄR SÅLEDES $\bar{x}' = 0$. DET HAR LÖSNINGAR $\bar{x}(t) = \bar{c}$ FÖR GODTYCKLIG KONSTANT $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$. D.V.S. 0 ÄR STABIL FÖR DET LINJ. SYS. VI KAN ALLTSÅ INTE DRA SLUTSATSER OM STABILITET FÖR DET URSPRUNGLIGA SYSTEMET.

FÖRSÖK ATT KONSTRUERA LYAPUNOVFUNKTION

$$V(x,y) = ax^2 + cy^2$$

DÄR a, c ÄR KONST. SOM SKA BESTÄMMAS.

KRAVET $V(x,y) > 0$ FÖR $(x,y) \neq 0$ GER $a, c > 0$. (OM T.EX. $a \leq 0$ SÅ SKULLE $V(x,0) \leq 0$.)

BETRAKTA $\dot{V}$:

$$\dot{V}(x,y) = 2ax \cdot (-x^3 + 2xy^2) + 2cy \cdot (-2x^2y - y^3) = 4x^2y^2 \cdot (a-c) - 2ax^4 - 2cy^4$$

OBS ATT OM $a = c > 0$ SÅ $\dot{V} = -2a(x^4 + y^4) < 0$ FÖR $(x,y) \neq 0$.

SAMMANFATTNINGSVIS: OM VI LÅTER $V(x,y) = x^2 + y^2$ SÅ ÄR V POSITIVT DEFINIT OCH $\dot{V}$ ÄR NEGATIV DEFINIT. SATS 9.6.1 (S.558) GER ATT ORIGO ÄR ASYMPTOTISKT STABIL.

SVAR: ORIGO ÄR ASYMPTOTISKT STABIL

$\boxed{9.6.4}$

$$\begin{cases} x' = 2x^3 - y^3 \\ y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases}$$

$V(x,y) = ax^2 + cy^2$

$\dot{V}(x,y) = 2ax(2x^3 - y^3) + 2cy(2xy^2 + 4x^2y + 2y^3)$

$= 4ax^4 + 4cy^4 + 8cx^2y^2 - 2axy^3 + 4cxy^3$

VÄLJ $c = 1$, $a = 2$. DÅ

$\dot{V}(x,y) = 8x^4 + 4y^4 + 8x^2y^2 > 0 \qquad (x,y) \neq 0$

OCH

$V(x,y) = 2x^2 + y^2 > 0 \qquad (x,y) \neq 0$

SATS 9.6.2 (S. 558) GER ATT (0,0) ÄR INSTABIL TY V OCH $\dot{V}$ ÄR POSITIV DEFINITA I ETT OMRÅDE KRING (0,0).