SATS 4.4: $f \in C^k(\mathbb{T}) \Rightarrow |\hat{f}(n)| \le \frac{K}{|n|^k}$

EX $f(t) = t \Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{i}{n}$ (MEN $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ...!?)
$0 \le t \le 2\pi$ OBS INTE $C^\infty(\mathbb{T})$

$= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(t)$ DIRICHLET KERNEL FEJÉR KERNEL

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} f * D_n(t) = f * F_n(t)$$

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int} = f * D_n(t)$$

SATS 4.1: f STYCKVIS KONT. PÅ $\mathbb{T}$.
$\sigma_N(t) \to f(t)$ $\forall t$ DÄR f KONT.

SATS 4.2: f KONT. PÅ $\mathbb{T}$, $\sum |\hat{f}(n)| < \infty \Rightarrow f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$

KOR.
- f STYCKVIS KONT., $\hat{f}(n) = 0, \forall n \Rightarrow f(t) = 0$ $\forall t$ DÄR f KONT.
- f, g KONT. PÅ $\mathbb{T}$, $\hat{f}(n) = \hat{g}(n), \forall n \Rightarrow f \equiv g$

SATS 4.5: $\sum \hat{f}(n)e^{int} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$, $\forall t$ DÄR f HAR VÄNSTER OCH HÖGER GRÄNSV. OCH GENERALISERADE ENKELSIDIGA DERIVATOR EXISTERAR

OBS f ÄR "NÄSTAN" C^1

OBS LÄGG MÄRKE TILL HUR f BESKRIVS I PROBLEM

$f(t) = t$, $|t| < \pi$
$g(t) = t$, $0 < t < 2\pi$ (OBS! $f, g \notin C^0(\mathbb{T})$!)
GER UPPHOV TILL TVÅ OLIKA FUNKTIONER PÅ $\mathbb{T}$

RIEMANN-LEBESGUES LEMMA: OM f ÄR ABSOLUT INTEGRERBAR PÅ INTERVALLET I SÅ
$$\int f(t)e^{int} \to 0 \text{ DÅ } n \to \pm\infty, \forall t.$$

$\boxed{4.15}$ $f \in C^k(\mathbb{T}) \implies n^k \cdot \hat{f}(n) \longrightarrow 0$ DÅ $n \to \pm\infty$

BEVIS: ENLIGT ARGUMENT PÅ S. 84-85 SÅ GÄLLER

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \cdot \hat{f}(n)$$

DÄR $f^{(k)}$ ÄR f DERIVERAD k GÅNGER.

ENLIGT ANTAGANDE ÄR $f^{(k)} \in C(\mathbb{T})$ SÅ RIEMANN-LEBESGUES LEMMA GER ATT (*)

$$\widehat{f^{(k)}}(n) \longrightarrow 0 \quad \text{DÅ} \quad n \to \pm\infty$$

SÅLEDES

$$n^k \cdot \hat{f}(n) = (i)^{-k} \cdot \widehat{f^{(k)}}(n) \longrightarrow 0 \quad \text{DÅ} \quad n \to \pm\infty. \qquad \square$$

(*) OBS: OM g ÄR KONTINUERLIG PÅ CIRKELN SÅ ÄR g ABSOLUT INTEGRERBAR ÖVER CIRKELN.

FARA: $h(x) = \frac{1}{x}$ ÄR KONT. PÅ $(0, 2\pi]$ MEN h ÄR EJ KONT. PÅ CIRKELN (OCH EJ HELLER INTEGRERBAR)

$\boxed{4.19}$ $f(t) = (t+1)\cdot\cos t, \quad -\pi < t < \pi$

VAD ÄR SUMMAN TILL F-SERIEN FÖR f I $t = 3\pi$?

UNDERFÖRSTÅTT ATT f ÄR 2π-PERIODISK, SÅ $f(3\pi) = f(\pi + 2\pi) = f(\pi)$.

$$f(\pi^-) = \lim_{t \nearrow \pi} f(t) = (\pi+1)\cdot\cos\pi = -(\pi+1)$$

$$f(\pi^+) = \lim_{t \searrow -\pi} f(t) = (-\pi+1)\cdot\cos(-\pi) = \pi - 1$$

f ÄR EN PRODUKT AV DERIVERBARA FUNKTIONER SÅ f HAR GENERALISERADE ENKELSIDIGA DERIVATOR I $t = \pi$.

SÅLEDES GER SATS 4.5 ATT F-SERIEN I $t = 3\pi$ KONV. MOT

$$\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{-\pi - 1 + \pi - 1}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

SVAR

$\boxed{4.26}$ $\quad f \begin{cases} \text{2-PERIODISK} \\ \text{UDDA} \end{cases}, \quad f(x) = x - x^2, \quad 0<x<1$

a) BERÄKNA FOURIERSERIEN

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\cdot\left\{ \left[x(1-x)\frac{\cos(n\pi t)}{-n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 (1-2x)\,\frac{\cos(n\pi t)}{-n\pi}\,dt \right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot\int_0^1 (1-2x)\cos(n\pi t)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left\{ \left[(1-2x)\cdot\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 (-2)\cdot\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\,dt \right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{ -\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi t)\,dt \right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{ \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(n\pi t)}{-n\pi}\right]_0^1 \right\} = -\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{n\pi}\cdot\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right)$$

$$= -\frac{4}{(n\pi)^3}\cdot\left((-1)^n - 1\right)$$

SVAR: $\quad f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}\cdot\sin(n\pi t)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^3\cdot\sin((2n-1)\pi t)$$

b) BERÄKNA $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

OBS ATT f ÄR KONT. OCH DERIVERBAR FÖR $t=\frac{1}{2}$. SÅ SATS 4.J GER

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^3\cdot\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{2^5}$$

SVAR: $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$