DEF: ℓ^2 : ALLA SEKVENSER $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ S.A. $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$

MED INRE PRODUKT $\langle x, y\rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

ℓ^2 ÄR MODELL FÖR ALLA INREPRODUKTRUM MED FULLSTÄNDIG ON-SYSTEM.

DEFINIERA $\Phi(u) = \{\langle u, \varphi_n\rangle_V\}_{n=1}^{\infty}$ $(u \in V,\ \{\varphi_n\}$ ON-SYSTEM$)$

BESSELS OLIKHET GER

$$\| \Phi(u) \|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_n\rangle_V|^2 \leq \|u\|_V^2 < \infty$$

SÅ $\Phi : V \to \ell^2$.

ANTAG ATT $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ FULLSTÄNDIGT I V. DÅ GER PARSEVAL

$$\langle \Phi(u), \Phi(v)\rangle_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k\rangle_V \overline{\langle v, \varphi_k\rangle_V} = \langle u, v\rangle_V$$

D.V.S. ~~INREPRODUKTER MÅ~~ INREPRODUKTRUMMET V "IDENTIFIERAS" MED ℓ^2 VIA Φ.

FÖR ATT FÖRSTÅ ALLA V INREPRODUKTRUM MED FULLSTÄNDIG ON-SYSTEM SÅ RÄCKER DET ATT STUDERA ℓ^2.

SATS 5.5: $\{\varphi_n\}$ FULLST. ON-SYS I V $\Rightarrow$ $\| u - \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n \| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

D.V.S. $u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varphi_n\rangle \varphi_n$

D.V.S. FOURIERSERIEN FÖR u KONVERGERAR I NORM OCH DEN KONVERGERAR TILL u.

$\underset{\sim}{\text{EX}}$: $V = L^2(-\pi, \pi)$, $\varphi_n(t) = e^{int}$ L^2 : f S.A. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt$$

$$= \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} e^0\,dt = 2\pi , & n = m \\ \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 , & n \neq m \end{cases}$$

D.V.S. $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ÄR ORTOGONALT SYSTEM

SÅ $\{\hat{\varphi}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ÄR ON $\hat{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{2\pi}}$

SATS 5.5 $\rightarrow$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \hat{\varphi}_n \rangle \hat{\varphi}_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{\overline{e^{ins}}}{\sqrt{2\pi}}\,ds \cdot \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \cdot e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

~~NU~~ VI HAR VÅRA "VANLIGA" FOURIERSERIE SOM KONVERGERAR!
(KOM IHÅG SVÅRIGHETERNA VI HADE MED KONVERGENS FÖR KONTINUERLIGA f ... I L^2 ÄR ALLT "ENKLARE")

PDE

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (\text{RV}) \\ u(x,0) = f(t) \quad (\text{BV}) \end{cases}$$

$x \in (0,\pi)$

$t > 0$

LÖSN. $\sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$

FRÅGAN ÄR NÄR DESSA UPPFYLLER (BV)

$\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ORTOGONALT SYS. FÖR UDDA FUNKT. PÅ $(-\pi,\pi)$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$$

LÅT $f(x) = -f(-x)$, $-\pi < x < 0$. FOURIERKOEFF.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$$

OM $f \in L^2(-\pi,\pi)$ SÅ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

FIXERA $t > 0$.

LÅT $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \cdot \sin nx$

$$\|F\|_{L^2}^2 \underset{\text{PARSEVAL}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{-n^2 t}|^2 \leq \sum |b_n|^2 = \|f\|_{L^2}^2 < \infty$$

D.V.S. $F \in L^2$, $\forall t > 0$ (OCH OM $t=0$ SÅ $F = f$)

PDE – EXISTENS & ENTYDIGHET SVÅRT

SOM NGN LÖSNING INTE ALLA LÖSNINGAR

ÅTERIGEN – VISSA SPECIALFALL VI KAN LÖSA M.H.A. VARIABELSEPARATION

2014
03-12

HITTA EN LÖSNING TILL:

① (i) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + u$, (ii) $u(x,0) = \frac{e^x}{2}$

ANSÄTT $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{VL}: & X(x)T'(t) \\ \text{HL}: & X'(x)T(t) + X(x)T(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = \lambda$$

$T'(t) - \lambda T(t) = 0$ HAR LÖSN. $T(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t}$

$X'(x) + (1-\lambda) \cdot X(x) = 0$ HAR LÖSN $X(x) = C_2 \cdot e^{-(1-\lambda)x}$

LÖSN. TILL (i) ÄR

$$u(x,t) = X(x)T(t) = C_1 e^{\lambda t} \cdot C_2 \cdot e^{-(1-\lambda)x} = C \cdot e^{\lambda t + (\lambda - 1)x}$$

ANVÄND (ii):

$$\frac{e^x}{2} = C \cdot e^{(\lambda-1)x}$$

EN UPPENBAR MÖJLIGHET ÄR $C = \frac{1}{2}$ $\lambda = 2$.

D.V.S. $u(x,t) = \frac{1}{2} \cdot e^{2t+x}$ ÄR EN LÖSNING.

KONTROLL:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = e^{2t+x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + u = \frac{1}{2} e^{2t+x} + \frac{1}{2} e^{2t+x} = e^{2t+x} \end{array}\right\} \text{OK!}$$

$u(x,0) = \frac{1}{2} e^x$ OK!

EX 6.2) HITTA EN LÖSNING TILL

(E) $u_{xx} = u_t$

(B) $u(0,t) = \cancel{}\ 2$

$u(2,t) = 5$

(I) $u(x,0) = 1 - x^2$

$\Bigg\| \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ t > 0 \end{array}$

$\Rightarrow$ HOMOGENT! ANSÄTT $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ OCH VÄLJ φ S.A. PROBLEMET BLIR HOMOGENT

$u_{xx} = v_{xx} + \varphi'' = v_t = u_t$

VILL HA $v_{xx} = v_t$ SÅ $\varphi'' = 0$

D.V.S. $\varphi(x) = Ax + B$

$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = v(0,t) + \varphi(0) = 2 \\ u(2,t) = v(2,t) + \varphi(2) = 5 \end{array}\right\}$

VILL HA $v(0,t) = v(2,t) = 0$

D.V.S. $\varphi(0) = 2$, $\varphi(2) = 5$

GER $B = 2$ $A = 3/2$

BEGYNNELSEVILLKORET FÖR v BLIR

$$v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x) = 1 - x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = -x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

HOMOGENISERADE SYSTEMET BLIR:

(E') $\quad v_{xx} = v_t \qquad x \in (0,2)$

(B') $\quad v(0,t) = v(2,t) = 0 \qquad t > 0$

(I') $\quad v(x,0) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = f(x)$

ANVÄND VARIABELSEPARATION

$$v = X(x) \cdot T(t)$$

$$X'' \cdot T = X \cdot T' \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(2) = 0$$

$$T' + \lambda T = 0 \quad \to \quad T(t) = e^{-\lambda t} \quad (\lambda \neq 0), \quad T(t) = C \quad (\lambda = 0)$$

(i) $X(x) = C \cdot e^{i\lambda^{1/2}x} \quad (\lambda > 0)$, (ii) $X(x) = Cx + B \quad (\lambda = 0)$

(iii) $X(x) = C \cdot e^{|\lambda|^{1/2}x} \quad (\lambda < 0)$

(B') / (iii) $\to$ $C = 0$

(ii) $\to$ $B = 0$, $C = 0$ } FÖRKASTA BÅ DE GER $v(x,t) = 0$

(i) $\to$ $0 = C \cdot (\overbrace{\cos 0}^{=1} + i \underbrace{\sin 0}_{=0}) = C \cdot (\cos \lambda^{1/2} \cdot 2 + i \sin \lambda^{1/2} \cdot 2)$

BETRAKTA IMAGINÄRDELEN DÅ DEN GER ICKE-TRIVIALA LÖSN.

$$X(x) = \operatorname{Im} Ce^{i\lambda^{1/2}x} = C \cdot \sin \lambda^{1/2} x$$

$$\lambda^{1/2} \cdot 2 = n \cdot \pi, \ n \geq 1 \qquad \boxed{\lambda = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \qquad C \text{ GODTYCKL.}$$

$$X(x) = C_n \sin\left\{\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot x\right\}$$

$$T(t) = \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \cdot t\right\}$$

$$C_n \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t\right\} \cdot \sin\left\{\left(\frac{n\pi}{2}\right) x\right\}$$

LÖSNINGAR TILL (E') & (B')

$$v(x,t) = \sum_{n=1} b_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \cdot t\right\} \cdot \sin\left\{\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot x\right\}$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx \qquad \Omega = \frac{\pi}{p} \qquad p = 2$$

OBS $\left\{ \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ ORTOGONALT ~~ON~~-SYSTEM FÖR UDDA FUNKTIONER I $L^2(-2,2)$

VI KAN UTVECKLA $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ I DESSA FUNKTIONER.

OBS! $f(x) = -f(-x)$ FÖR $-2 < x < 0$. VET ATT

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$

2014
03-12

(5) HITTA EN LÖSNING TILL

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2x \qquad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = \sin x \qquad 0 < x < \pi$$

ANSÄTT $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x^2} + \varphi''(x) + \sin 2x$$ → VÄLJ: $\varphi''(x) = -\sin 2x$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$

$0 = u(0,t) = v(0,t) + C_2$ → VÄLJ $C_2 = 0$

$0 = u(\pi,t) = v(\pi,t) + C_1\pi$ → VÄLJ $C_1 = 0$

VÄLJ $\varphi(x) = +\frac{1}{4}\sin 2x$. GER SYSTEMET

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) + \frac{1}{4}\sin 2x = \sin x \end{cases}$$

ANSÄTT $v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$X \cdot T' = X'' \cdot T \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \lambda T = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{i\lambda^{1/2} x} \\ T(t) &= c_2 e^{-\lambda t} \end{aligned} \qquad \text{OM } \lambda \geq 0$$

VÄLJ $v(x,t) = c_\lambda \cdot e^{-\lambda^2 t} \cdot \sin \lambda x$, $\lambda > 0$

R.V. $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$ GER $\sin \lambda\pi = 0$, VÄLJ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$

D.V.S. $v_n(x,t) = c_n e^{-n^2 t} \cdot \sin nx$ ÄR ALLA LÖSNINGAR

OCH SÅ ÄVEN $v(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-n^2 t} \cdot \sin nx$, $\forall N$.

2014
03-12

5.) B.V. FORTS.

$$\sin x - \frac{1}{4}\sin 2x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \sin nx$$

VÄLJ $c_1 = 1,\ c_2 = -\frac{1}{4},\ c_k = 0,\ \forall k \geq 3$. DET GER EN LÖSNING

$$v(x,t) = e^{-t} \cdot \sin x - \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \cdot \sin 2x$$

LÖSN. TILL URSPRUNGLIGA PROBLEMET ÄR $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$, D.V.S

$$u(x,t) = e^{-t} \cdot \sin x - \frac{1}{4}(e^{-4t} - 1) \cdot \sin 2x$$ SVAR