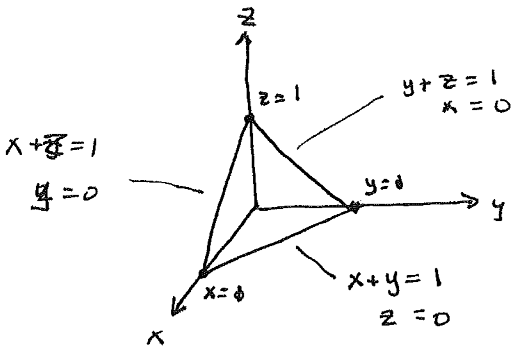
BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

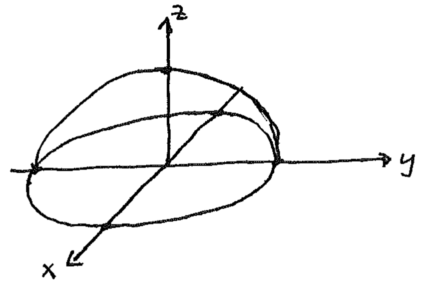
$\boxed{1.10}$ $M_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$



1. RANDPUNKTER SOM ÄR "ENKLA" ATT BESTÄMMA
   $x=1,\ y=1,\ z=1$
   $x+y=1,\ x+z=1,\ y+z=1$
2. FYLL I RESTEN AV RANDEN ("$\le$" GER ATT RANDEN TILLHÖR M_1)
3. INRE PUNKTER

$M_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$

1. RANDEN ÄR EN SFÄR AV RADIE $\sqrt{4}\ (=2)$, MED VILLKORET $z \ge 0$. DVS, EN HALVSFÄR. ("$\le$" $\Rightarrow$ RANDEN TILLHÖR M_2)
2. INRE PUNKTER



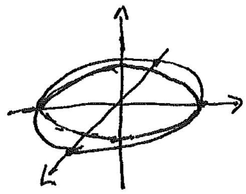
$M_3 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+4z^2 \le 1\}$

1. KOORDINATBYTE $(x,y,z) \longmapsto (\xi, \eta, \zeta/2)$
2. I (ξ,η,ζ)-KOORDINATER ÄR M_3 ENHETSKLOTET
   $x^2+y^2+4z^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \le 1$
3. "ENKLA" RANDPUNKTER: T.EX. CIRKLAR I (ξ,η,ζ)-KOORD.

$$\left.\begin{aligned}\xi^2+\eta^2&=1\\ \zeta^2&=0\end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned}x^2+y^2&=1\\ z^2&=0\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}\xi^2+\zeta^2&=1\\ \eta^2&=0\end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned}x^2+4z^2&=1\\ y^2&=0\end{aligned}\right. \quad \text{(ELLIPS) s. 12}$$

$$\left.\begin{aligned}\eta^2+\zeta^2&=1\\ \xi^2&=0\end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned}y^2+4z^2&=1\\ x^2&=0\end{aligned}\right. \quad \text{(ELLIPS) s. 12}$$



(ELLIPSOID s. 29 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$)

4. FYLL I INRE PUNKTER

$\boxed{1.10}$ $M_4 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 1\}$

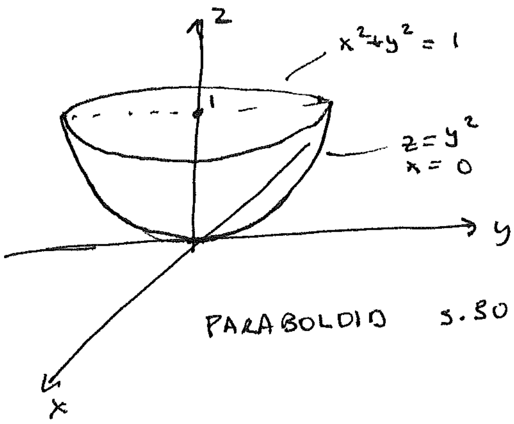
(FORTS.)

1. $x^2+y^2 = t^2$ CIRKLAR AV RADIE t PARALLELLA MED (x,y) – PLANET.

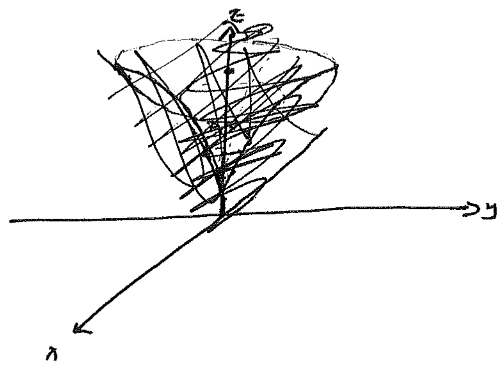
DÅ $x^2+y^2 \ge 0$ SER VI ATT $z \ge x^2+y^2 \ge 0$, DVS $z \ge 0$.

2. OM $y=0$ FÅR VI $x^2 \le z$. PÅ RANDEN $z = x^2$, DVS EN PARABEL.

OM $x=0$ FÅR VI PÅ SAMMA SÄTT $z=y^2$ PÅ RANDEN.



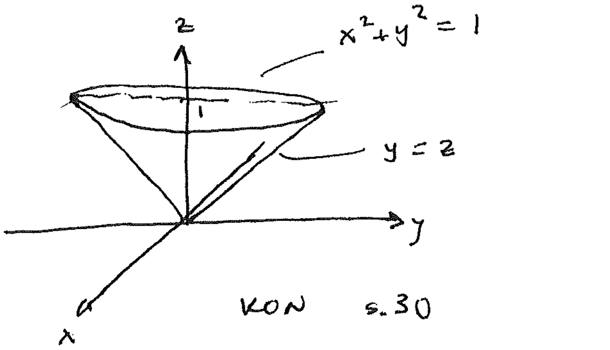
PARABOLOID s.30



$M_5 = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$

1. $\sqrt{x^2+y^2} = z \implies x^2+y^2 = z^2$ CIRKLAR I (x,y)-PLANET MED RADIE z

2. $\left.\begin{array}{l} x = 0 \implies y = z \\ y = 0 \implies x = z \end{array}\right\}$ RÄTA LINJER



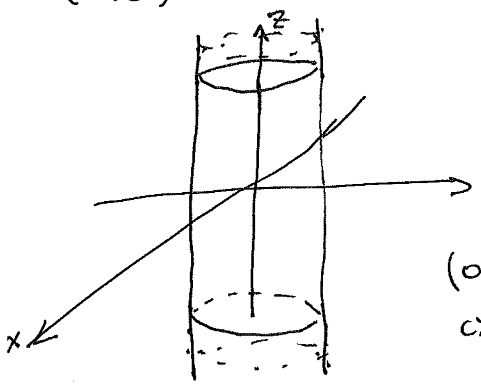
KON s.30

$\boxed{1.10}$ (FORTS.)

$$M_6 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

1. OBEROENDE AV z, DVS M_6 ÄR EN CYLINDER AV NÅGOT SLAG

2. $x^2+y^2=1$ CIRKEL I (x,y)-PLANET

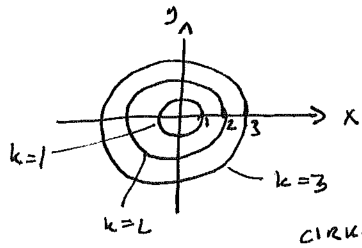


(OÄNDLIG) CYLINDER S.30

> NOTERA: ALLA MÄNGDER $(M_1 - M_6)$ ÄR SLUTNA, DVS RANDEN TILLHÖR MÄNGDEN

$\boxed{1.14}$ a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y)=k \implies \sqrt{x^2+y^2}=k \implies x^2+y^2=k^2$ CIRKEL ~~AV~~ MED RADIE k

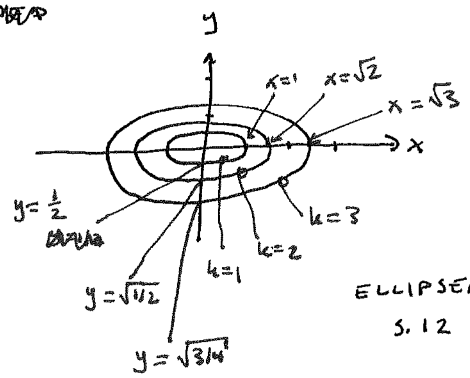


CIRKLAR S. 12

---

b) $f(x,y) = x^2+4y^2$

$f(x,y)=k \implies x^2+4y^2=k$ ELLIPS ~~MED~~ ~~HALVAXLAR~~



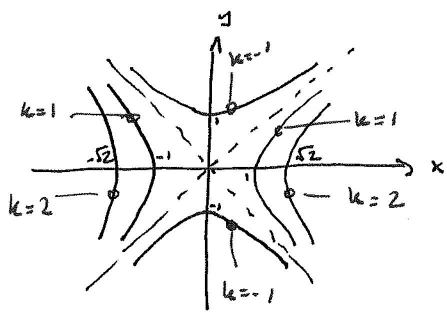
ELLIPSER S. 12

---

c) $f(x,y)=x^2-y^2$

$f(x,y)=k \implies x^2-y^2=k$

HYPERBEL: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (DÅ $k=-1$ FÅR VI $y^2-x^2=1$)



$x = \pm\sqrt{k+y^2}$

DÅ $y \gg 1$ (MYCKET STÖRRE ÄN 1)

SÅ ÄR $k+y^2 \approx 1$, DVS $x \approx \pm\sqrt{y^2} = \pm y$.

DVS, PARABELN NÄRMAR SIG LINJERNA $x=\pm y$ DÅ y VÄXER.

$\boxed{1.19}$ $\quad f(x,y,z) = z - \sqrt{1-x^2-y^2}$

(i) $\left\{ \; f(x,y,z) = 0 \implies z - \sqrt{1-x^2-y^2} = 0 \implies z^2 = 1 - x^2 - y^2 \right.$

$x^2+y^2+z^2 = 1$ ENHETSSFÄR

(ii) $\left\{ \; x^2+y^2+z^2 = 1 \implies f(x,y,z) = z - \sqrt{z^2} = z - |z| \right.$

$$\implies f(x,y,z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ 2z, & z < 0 \end{cases}$$

DVS $f(x,y,z) = 0$ PÅ ÖVRE HALVSFÄREN

$f(x,y,z) = 1 \implies z - \sqrt{1-x^2-y^2} = 1 \implies (z-1)^2 = 1 - x^2 - y^2$

$\implies x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ ENHETSSFÄR MED CENTRUM $(0,0,1)$

$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1 \implies f(x,y,z) = z - \sqrt{(z-1)^2} = z - |z-1|$

$$\implies f(x,y,z) = \begin{cases} z - z + 1 = 1, & z \geq 1 \\ z + z - 1 = 2z - 1, & z < 1 \end{cases}$$

DVS $f(x,y,z) = 1$ PÅ ÖVRE HALVAN AV ENHETSSFÄR MED CENTRUM $(0,0,1)$

NOTERA: (i) VISAR ATT OM $f(x,y,z) = 0$ SÅ ÄR $x^2+y^2+z^2 = 1$

(ii) VISAR ATT $f(x,y,z) = 0$ DÅ $x^2+y^2+z^2 = 1$ OCH $z \geq 0$, MEN INTE OM $z < 0$.

D.V.S (i) + (ii) GER $f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

(OM OCH ENDAST OM)

$\boxed{1.23}$

$$\begin{cases} (x,y) = (t^2, t+1), \quad t \in \mathbb{R} & \text{(i)} \\ 5x^2 + 5xy + 3y^2 - 8x - 6y + 3 = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

SÄTT IN $x = t^2$, $y = t+1$ I (ii):

$$5t^4 + 5t^2(t+1) + 3(t+1)^2 - 8t^2 - 6(t+1) + 3 = 0$$

$$5t^4 + 5t^3 + 5t^2 + 3t^2 + 6t + 3 - 8t^2 - 6t - 6 + 3 = 0$$

$$5t^4 + 5t^3 = 0$$

$$5t^3(t+1) = 0$$

DENNA EKVATION HAR LÖSNINGARNA $t_1 = 0$, $t_2 = -1$, VILKET GER PUNKTERNA

$$\begin{cases} x_1 = t_1^2 = 0 \\ y_1 = t_1 + 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = t_2^2 = 1 \\ y_2 = t_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

KONTROLLERA GENOM INSÄTTNING I (ii)

$$5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 3 = 0 \quad \text{(OK)}$$

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 8 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 3 = 0 \quad \text{(OK)}$$

KURVORNA (i) OCH (ii) HAR SKÄRNINGSPUNKTERNA $(0,1)$ OCH $(1,0)$.

$\boxed{1.24}$ (GRÄNSVÄRDEN S.34)

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \overbrace{\frac{x-y}{x-1}}^{f(x,y)}$$

FÖR ATT GRÄNSVÄRDET SKA EXISTERA SÅ MÅSTE DET FINNAS ETT TAL b SÅDANT ATT $f(x,y)$ NÄRMAR SIG b OBEROENDE AV HUR (x,y) NÄRMAR SIG $(1,1)$.

OM VI KAN HITTA TVÅ OLIKA SÄTT ATT NÄRMA (x,y) TILL $(1,1)$ SOM GER SKILDA VÄRDEN PÅ $f(x,y)$ SÅ KAN INTE GRÄNSVÄRDET EXISTERA.

1. LÅT $(x,y) \longrightarrow (1,1)$ VIA KURVAN $(x,y) = (1+t, 1)$:

$$f(1+t,1) = \frac{1+t-1}{1+t-1} = \frac{t}{t} = 1$$

DVS $f(x,y)=1$ FÖR ALLA PUNKTER PÅ DENNA KURVA.

2. LÅT $(x,y) \longrightarrow (1,1)$ VIA KURVAN $x-y=0$, DVS $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{0}{x-1} = 0 \quad \text{OM} \quad x \neq 1$$

SÅLEDES GÄLLER $f(x,y)=0$ FÖR ALLA PUNKTER UTOM $(1,1)$ PÅ DENNA KURVA.

NU SER VI ATT GRÄNSVÄRDET EJ EXISTERAR, TY $f(x,y) \longrightarrow 1$ DÅ $(x,y) \longrightarrow (1,1)$ PÅ DEN FÖRSTA KURVAN, MEDANS $f(x,y) \longrightarrow 0$ DÅ $(x,y) \longrightarrow (1,1)$ PÅ KURVA 2.

$\boxed{1.24}$

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{x^3-x^2y}^{f(x,y)}}{x^2+y^2+xy}$$

PRÖVA FÖRST ATT NÄRMA (0,0) FRÅN OLIKA RIKTNINGAR. VERKAR SOM GRÄNSVÄRDET ÄR 0. VILL VISA DETTA!

BYT TILL POLÄRA KOORDINATER

$x = r\cos\theta$ $\qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$y = r\cdot\sin\theta$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{(r\cos\theta)^3 - (r\cos\theta)^2 r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)(r\sin\theta)}$$

$$= \frac{(r\cos\theta)^2(r\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta)}$$

$$= r\cos^2\theta \cdot \frac{\cos\theta - \sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}$$

$$= r\cdot\cos^2\theta \cdot \frac{\cos\theta - \sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta} \qquad \left\{1+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta \geq \tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\leq r\cdot\cos^2\theta \cdot \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\frac{1}{2}}$$

OM $r \to 0$ SÅ $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$. DVS.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(NOTERA ATT DET I ALLMÄNHET ÄR LÄTTARE ATT VISA ATT ETT GRÄNSVÄRDE EJ EXISTERAR.)

$\boxed{1.29}$ (KONTINUITET S. 40)

a) $$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

LÄGG MÄRKE TILL ATT FUNKTIONERNA

$$g(x,y) := \sin(x^2+y^2)$$

$$h(x,y) := x^2+y^2$$

ÄR KONTINUERLIGA PÅ HELA $\mathbb{R}^2$.

(g ÄR EN SAMMANSÄTTNING AV $t \mapsto \sin t$ OCH $h(x,y)$ VILKA BÅDA ÄR KONTINUERLIGA.)

DOCK ÄR $h(x,y) = 0$ DÅ $(x,y) = (0,0)$ SÅ VI KAN INTE MED EN GÅNG AVGÖRA ATT

$$f(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$$

ÄR KONTINUERLIG I $(0,0)$. (MEN $f(x,y)$ ÄR KONTINUERLIG I ALLA ANDRA PUNKTER.)

FÖR ATT VISA ATT $f(x,y)$ KAN UTVIDGAS KONTINUERLIGT TILL HELA $\mathbb{R}^2$ SÅ MÅSTE VI VISA ATT GRÄNSVÄRDET

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

EXISTERAR. FÖR ATT GÖRA DETTA LÅTER VI $t = x^2+y^2$

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \frac{\sin t}{t} \longrightarrow 1 \quad \text{DÅ} \quad t \to 0.$$

DVS GRÄNSVÄRDET EXISTERAR OCH ÄR LIKA MED 1.

VI DEFINIERAR NU $f(0,0) = 1$ OCH FÅR PÅ SÅDANT SÄTT ATT f ÄR KONTINUERLIG PÅ HELA $\mathbb{R}^2$.

(NOTIS: $\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \longrightarrow 1, \quad t \to 0$)