LEKTION 2   25/1/08   SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{2.8}$ ENLIGT DEFINITION ÄR f DIFFERENTIERBAR I PUNKTEN a OM

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n + |h|\,\rho(h)$$

DÄR A_j ÄR KONSTANTER OCH $\rho(h) \longrightarrow 0$ DÅ $|h| \to 0$.

d) $f(x,y) = \sin(x+y)$, $\quad a = (1,1)$

UNDERSÖK HUR f BETER SIG NÄRA a, $h = (h_1, h_2)$,

$$f(a+h) = f(1+h_1, 1+h_2) = \sin(1+h_1+1+h_2) = \sin(2+[h_1+h_2])$$
$$= \sin 2 \cdot \cos(h_1+h_2) + \sin(h_1+h_2)\cdot \cos 2$$

TAYLORUTVECKLING GER

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots = 1 + t^2\left(-\frac{1}{2!} + \frac{t^2}{4!} - \cdots\right) = 1 + t^2 \cdot M(t)$$
$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots = t + t^2\left(-\frac{t}{3!} + \frac{t^3}{5!} - \cdots\right) = t + t^2 \cdot N(t)$$

DÄR $M(t)$ OCH $N(t)$ ÄR BEGRÄNSADE FUNKTIONER FÖR $t \approx 0$.

DETTA GER

$$f(a+h) = \sin 2 \cdot \left[1 + (h_1+h_2)^2 \cdot M(h_1+h_2)\right] + \cos 2 \cdot \left[(h_1+h_2) + (h_1+h_2)^2 \cdot N(h_1+h_2)\right]$$
$$= \sin 2 + h_1 \cdot \cos 2 + h_2 \cdot \cos 2 + (h_1+h_2)^2 \cdot K(h_1+h_2)$$

DÄR $K(h_1+h_2)$ ÄR BEGRÄNSAD FÖR $h_1+h_2 \approx 0$. VI FÅR ATT

$$f(a+h) - f(a) = \sin(2+[h_1+h_2]) - \sin 2 =$$
$$= h_1 \cdot \cos 2 + h_2 \cdot \cos 2 + (h_1+h_2)^2 \cdot K(h_1+h_2)$$
$$= h_1 \cdot \cos 2 \cdot h_2 \cdot \cos 2 + |h| \cdot \underbrace{\frac{(h_1+h_2)^2 \cdot K(h_1+h_2)}{|h|}}_{\rho(h)}$$

$$|\rho(h)| = \left|\frac{(h_1+h_2)^2}{|h|} \cdot K(h_1+h_2)\right| = \underset{\text{CAUCHY SCHWARTZ OLIKH. (S. 8)}}{\leq} \frac{2|h|^2}{|h|} \cdot |K(h_1+h_2)|$$
$$= 2\cdot|h|\cdot|K(h_1+h_2)| \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0$$

VILKET VISAR ATT f ÄR DIFFERENTIERBAR I PUNKTEN a.

("BÄTTRE" LÖSNING: PARTIALDERIVERA OCH ANVÄND KEDJEREGELN)

$\boxed{2.10}$ $g = 2 \cdot s \cdot t^{-2}$

DVS. g ÄR EN FUNKTION AV s OCH t SÅ VI KAN SKRIVA

$$g(s,t) = 2 \cdot s \cdot t^{-2}$$

PARTIALDERIVATORNA GES AV

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 2 \cdot t^{-2} \qquad \frac{\partial g}{\partial t} = -4 \cdot s \cdot t^{-3}$$

OM $s = s_0 + \Delta s$, $t = t_0 + \Delta t$ SÅ GER DEN ALLMÄNA FELFORTPLATNINGSFORMEN (S.59) ATT $g = g_0 + \Delta g$ DÄR

$$|\Delta g| \lesssim \left|\frac{\partial g}{\partial s}\right| \cdot |\Delta s| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \cdot |\Delta t|$$

GIVET $s = 2 \pm 0.01$, $t = 0.63 \pm 0.01$ FÅR VI

$$g = 2 \cdot 2 \cdot 0.63^{-2} \pm \left(2 \cdot 0.63^{-2} \cdot 0.01 + 4 \cdot 2 \cdot 0.63^{-3} \cdot 0.01\right)$$

$$\approx 10.1 \pm 0.4$$

FÖRTYDLIGANDE AV $|\rho(h)|$ UPPSKATTNING I ~~EXEMPEL~~ UPPGIFT 2.8 d).

CAUCHY–SCWARTZ OLIKHET (S.8) MED $x_i = h_i$ OCH $y_1 = y_2 = 1$

GER

$$|h_1 + h_2| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = |h| \cdot \sqrt{2}$$

SÅLEDES FÅR VI

$$|\rho(h)| = \left| \frac{(h_1+h_2)^2}{|h|} \cdot K(h_1+h_2) \right| \leq \frac{2 \cdot |h|^2}{|h|} \cdot |K(h_1+h_2)|$$

$$= 2 \cdot |h| \cdot |K(h_1+h_2)| \longrightarrow 0 \quad \text{DÅ} \quad |h| \to 0$$

$\boxed{2.13}$ $\quad f(x,y) = e^{x^2 y} + xy$

$u(t) = f(\cos t, \sin t)$

a) $u(t) = \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} + \cos t \cdot \sin t$

$$u'(t) = \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [\underbrace{-2 \cdot \cos t \cdot \sin^2 t + \cos^3 t}] + \underbrace{-\sin^2 t + \cos^2 t}_{= \cos 2t}$$

$= -2\cos t \left[\sin^2 t - \frac{\cos^2 t}{2}\right]$

$= -2\cos t \left[1 - \cos^2 t - \frac{1}{2}\cos^2 t\right]$

$= -2\cos t + 3\cos^3 t$

$$= \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [3\cos^3 t - 2\cos t] + \cos 2t$$

b) $u'(t) = f'_x(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t) + f'_y(\cos t, \sin t) \cdot \cos t$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = e^{x^2 y} \cdot 2xy + y \\ f'_y(x,y) = e^{x^2 y} \cdot x^2 + x \end{cases}$$

$$u'(t) = -\sin t \cdot [\exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot 2\cos t \cdot \sin t + \sin t]$$
$$+ \cos t \cdot [\exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot \cos^2 t + \cos t]$$

$$= \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [\underbrace{-2 \cdot \cos t \cdot \sin^2 t}_{-2\cos t + 2\cos^3 t} + \cos^3 t] - \sin^2 t + \cos^2 t$$

$$= \exp\{\cos^2 t \cdot \sin t\} \cdot [3 \cdot \cos^3 t - 2\cos t] + \cos 2t$$

$\boxed{2.17}$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot g(xy^{-1}) = (xy)^{-1/2} \cdot g(xy^{-1})$$

PARTIALDERIVERA

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(xy)^{-1/2}\right\} \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{g(xy^{-1})\right\}$$

(PRODUKTREGELN)

$$= -\frac{1}{2}(xy)^{-3/2} \cdot y \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot y^{-1}$$

(KEDJEREGELN)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{(xy)^{-1/2}\right\} \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left\{g(xy^{-1})\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}(xy)^{-3/2} \cdot x \cdot g(xy^{-1}) + (xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot (-xy^{-2})$$

VILKET GER

$$x \cdot f'_x + y \cdot f'_y + f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{xy}{(xy)^{3/2}} \cdot g(xy^{-1}) + \underline{(xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot xy^{-1}}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{xy}{(xy)^{3/2}} \cdot g(xy^{-1}) - \underline{(xy)^{-1/2} \cdot g'(xy^{-1}) \cdot xy^{-1}}$$

$$+ (xy)^{-1/2} \cdot g(xy^{-1})$$

$$= -\frac{g(xy^{-1})}{(xy)^{1/2}} + \frac{g(xy^{-1})}{(xy)^{1/2}} = 0$$

2.21 $f(x,y)$ ÄR EN FUNKTION I VARIABLERNA x OCH y.

INFÖR NYA VARIABLER

$$\begin{cases} u = x - ky, \\ v = x + ky, \end{cases} \qquad k \neq 0$$

DETTA STEG ÄR ONÖDIGT

~~LÖS UT x OCH y~~

$$\cancel{u + v = 2x \implies x = \tfrac{1}{2}(u+v)}$$

$$\cancel{v - u = 2ky \implies y = \tfrac{1}{2k}(v-u)}$$

~~NU KAN VI BETRAKTA x OCH y SOM FUNKTIONER AV u OCH v, DVS~~

$$\cancel{x = x(u,v), \quad y = y(u,v)}$$

PARTIALDERIVERA $f(x,y)$ M.A.P. x OCH y,

ANVÄND KEDJEREGELN:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(-k) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot k$$

---

b)
$$2\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(2-k) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot(2+k)$$

OM VI VÄLJER $k = 2$ SÅ ÄR OVANSTÅNDE EKV. NOLL OMM f ÄR OBEROENDE AV v (TY DÅ $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$). DVS

$$f(u,v) = g(u) = g(x - 2y)$$

DÄR g ÄR NÅGON DIFFERENTIERBAR FUNKTION.

VILLKORET $f(x,0) = \sin x$ GER

$$g(x) = \sin x$$

SÅLEDES MÅSTE

$$f(x,y) = g(x-2y) = \sin(x-2y).$$

$\boxed{2.30}$ ENLIGT SATS 6 (s. 78) SÅ GES RIKTNINGSDERIVATAN AV

$$f'_{\hat{v}}(a) = \text{grad } f(a) \cdot \hat{v}$$

DÅ $|\hat{v}| = 1$.

GIVET

$$f(x,y,z) = \frac{xy^2z^3}{2+x}, \qquad a = (2,2,1), \qquad v = (-4,2,-4)$$

RIKTNINGEN ÄR EJ NORMERAD; LÅT $\hat{v} = v/|v|$, DÅ GÄLLER $|\hat{v}| = 1$ (DVS $\hat{v}$ HAR SAMMA RIKTNING SOM v, FAST $\hat{v}$ ÄR NORMERAD.)

$$\hat{v} = \frac{(-4,2,-4)}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{(-4,2,-4)}{6} = \frac{1}{3}\cdot(-2,1,-2)$$

BERÄKNA GRADIENTEN I a:

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

$$f'_x = \frac{y^2z^3\cdot(2+x) - xy^2z^3}{(2+x)^2} = \frac{2y^2z^3}{(2+x)^2}$$

$$f'_y = \frac{2xyz^3}{2+x}$$

$$f'_z = \frac{3xy^2z^2}{2+x}$$

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{2\cdot4\cdot1}{4^2}, \frac{2\cdot2\cdot2\cdot1}{4}, \frac{3\cdot2\cdot4\cdot1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, 6\right)$$

DETTA GER RIKTNINGSDERIVATAN

$$f'_{\hat{v}}(a) = \left(\frac{1}{2}, 2, 6\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

$\boxed{2.35}$ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $a = (2,3,6)$

BERÄKNA GRADIENTEN I a:

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y, \quad f'_z = 2z$$

$$\text{grad } f(a) = 2\cdot(2,3,6)$$

LÅT $\hat{v}$ VARA NGN. VEKTOR S.A. $|\hat{v}| = 1$; DÅ GÄLLER

$$f'_{\hat{v}}(a) = \text{grad } f(a) \cdot \hat{v} = |\text{grad } f(a)| \cdot |\hat{v}| \cdot \cos\theta$$

DÄR θ ÄR VINKELN MELLAN grad $f(a)$ OCH $\hat{v}$.

DÅ $\cos\theta$ ANTAR ALLA VÄRDEN MELLAN -1 OCH 1
DÅ θ VARIERAS MELLAN $-\pi$ OCH 0 SÅ FÅR VI
ATT

$$-|\text{grad } f(a)| \le f'_{\hat{v}}(a) \le |\text{grad } f(a)|$$

DÅ

$$|\text{grad } f(a)| = \sqrt{16+36+144} = 2\cdot\sqrt{4+9+36} = 2\sqrt{49} = 14$$

SER VI ATT RIKTNINGSDERIVATAN ANTAR ALLA VÄRDEN MELLAN -14 OCH 14 (INKLUSIVE) DÅ $\hat{v}$ VARIERAS.

$$-14 \le f'_{\hat{v}}(a) \le 14$$

SAMMANFATTNING – LEKTION 2

BEGREPP:
- PARTIELL DERIVATA (s. 45)
- DIFFERENTIERBARHET (s. 52)
- KLASSEN C^1 (KONTINUERLIGT DERIVERBARA FUNKTIONER) (s. 56)
- FELUPPSKATTNING (s. 58)
- KEDJEREGELN (s. 60)
- GRADIENT OCH RIKTNINGSDERIVATA (s. 74)

SATSER:
- $f \in C^1 \Rightarrow f$ DIFFERENTIERBAR (SATS 3, s. 56)
  (DEN OMVÄNDA UTSAGAN ÄR <u>EJ</u> SANN!)
- SATS 6 (s. 78) ANVÄNDS OFTA FÖR ATT BERÄKNA RIKTNINGSDERIVATOR
- SATSERNA 7 (s. 79) OCH 8 (s. 82) GER GRADIENTEN EN GEOMETRISK BETYDELSE (VIKTIGT FÖR INTUITIONEN).

NOTERA:
- DIFFERENTIERBARHET DEFINIERAS ALLTID PÅ EN ÖPPEN MÄNGD. SÅLEDES OM EN FUNKTION ÄR DIFFERENTIERBAR SÅ ~~ÄR~~ MÅSTE DESS DEFINITIONSMÄNGD VARA ÖPPEN.