LEKTION 5 6/2/08 SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{4.1}$ $f : D \to \mathbb{R}$ ÄR KONTINUERLIG. BESTÄM OM f NÖDVÄNDIGTVIS ANTAR ETT EXTREMVÄRDE (PÅ D) OM

a) $D = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| < 1\}$

UPPGIFTEN GÅR UT PÅ ATT AVGÖRA OM D ÄR KOMPAKT ELLER INTE. OM D ÄR KOMPAKT SÅ GER SATS 4 (s. 41) ATT SVARET ÄR "JA". OM D EJ ÄR KOMPAKT SÅ KAN VI INTE MED SÄKERHET SÄGA OM f ANTAR SINA EXTREMVÄRDEN (DET BEROR PÅ f), SÅ I ~~$DET~~ DET FALLET ÄR SVARET "NEJ".

KOM IHÅG ATT D ÄR KOMPAKT OM OCH ENDAST OM D ÄR SLUTEN (D.V.S. RANDPUNKTER TILL D TILLHÖR D) OCH BEGRÄNSAD (D.V.S. DET FINNS EN ~~[illegible]~~ CIRKELSKIVA AV RADIE r, S_r, SÅDAN ATT $D \subset S_r$).

<u>SVAR:</u> NEJ. (D ÄR BEGRÄNSAD MEN EJ SLUTEN) ~~[illegible]~~

b) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

<u>SVAR:</u> JA. (D ÄR EN CIRKELSKIVA MED RADIE 1)

c) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \ge 1\}$

<u>SVAR:</u> NEJ. (D ÄR SLUTEN, MEN EJ BEGRÄNSAD.)

d) $D = \{(x,y) : x \cdot y \ge 1\}$

<u>SVAR:</u> NEJ. (D ÄR SLUTEN, MEN EJ BEGRÄNSAD.)

e) $D = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$

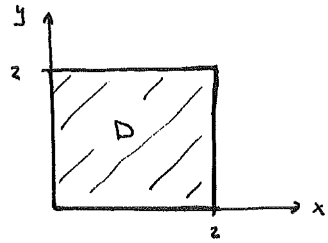
<u>SVAR:</u> JA. (D ÄR EN TRIANGEL)

$\boxed{4.6}$ $f : D \to \mathbb{R}$ $\quad D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$

$(x,y) \mapsto 4x^2y^2 - 2xy^4 - 3x^2$

BESTÄM FUNKTIONENS STÖRSTA OCH MINSTA VÄRDE (I D).

LÄGG MÄRKE TILL ATT D ÄR EN KOMPAKT MÄNGD, SAMT SÅ ÄR f KONTINUERLIG, SÅ SATS 4 (S. 41) GER ATT f ANTAR SINA EXTREMVÄRDEN (I D).



BESTÄM EXTREMVÄRDEN PÅ RANDEN:

$x=0$: $\quad f(0,y) = 0$

$x=2$: $\quad f(2,y) = 16y^2 - 4y^4 - 12 = g_1(y)$

$g_1'(y) = 32y - 16y^3 = 0 \implies 16y(2-y^2) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

$y=0$: $\quad f(2,0) = -3\cdot 2^2 = -12$

$y=\sqrt{2}$: $\quad f(2,\sqrt{2}) = 16\cdot 2 - 4\cdot 4 - 12 = 4$

($y=-\sqrt{2}$ TILLHÖR EJ D!)

$y=2$: $\quad f(2,2) = 16\cdot 4 - 4\cdot 16 - 12 = -12$

$y=0$: $\quad f(x,0) = -3x^2 = g_2(x)$

$g_2'(x) = -6x = 0 \implies x = 0$

$x=0$: $\quad f(0,0) = 0$

($x=2$: $\quad f(2,0) = -12$)

$y=2$: $\quad f(x,2) = 16x^2 - 32x - 3x^2 = 13x^2 - 32x = g_3(x)$

$g_3'(x) = 26x - 32 = 0 \implies x = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$

$x = \frac{16}{13}$: $\quad f\left(\frac{16}{13}, 2\right) = \frac{13\cdot 16^2}{13^2} - \frac{32\cdot 16}{13} = \frac{16^2}{13}\left(1 - \frac{2}{\ }\right) = -\frac{16^2}{13}$

$\boxed{4.6}$

(FORTS.)

SÖK STATIONÄRA PUNKTER I DET INRE AV D:

$$\text{grad } f = (8xy^2 - 2y^4 - 6x,\ 8x^2y - 8xy^3) = 0$$

$$8x^2y - 8xy^3 = 0 \implies x - y^2 = 0 \qquad (x \neq 0,\ y \neq 0)$$

$$8y^2 \cdot y^2 - 2y^4 - 6y^2 = 0 \implies 6y^4 - 6y^2 = 0 \implies y^2 - 1 = 0 \qquad (y \neq 0)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1 \qquad (y = -1, \text{ EJ I } D)$$

$$y = 1 \implies x = y^2 = 1$$

D.V.S. f HAR EN STATIONÄR PUNKT: $(1,1)$

$$f(1,1) = 4 - 2 - 3 = -1$$

SAMMANFATTNINGSVIS: $f(2, \sqrt{2}) = 4$ (MAXIMUM)

$$f\left(\frac{16}{13}, 2\right) = -\frac{16^2}{13} \quad \text{(MINIMUM)}$$

$\boxed{4.12}$ BESTÄM EXTREMVÄRDEN TILL $f(x,y) = (x^2+3y^2)\,e^{-x^2-y^2}$ PÅ $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$. (LÄGG MÄRKE TILL ATT D ÄR KOMPAKT!)

PÅ RANDEN ($x^2+y^2=4$):

$$f(x,y) = (x^2+3y^2)\,e^{-(x^2+y^2)} = (4-y^2+3y^2)\,e^{-4} = (2+y^2)\cdot 2e^{-4} = g(y)$$

$$g'(y) = 4e^{-4}\cdot y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = 4-0^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f(\pm 2, 0) = (4+3\cdot 0^2)\cdot e^{-4} = 4\cdot e^{-4}$$

I DET INRE AV D:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cdot e^{-x^2-y^2} + (x^2+3y^2)\cdot(-2\cdot x)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$= (1-x^2-3y^2)\cdot 2x\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y\cdot e^{-x^2-y^2} + (x^2+3y^2)\cdot(-2y)\cdot e^{-x^2-y^2} =$$

$$= (3-x^2-3y^2)\cdot 2y\cdot e^{-x^2-y^2}$$

NOTERA ATT $\exp\{-x^2-y^2\} \neq 0$ SÅ $\text{grad } f = 0$ OMM

$$\begin{cases} 2x\,(1-x^2-3y^2) = 0 & \Rightarrow x=0 \text{ EL. } 1-x^2-3y^2=0 \\ 2y\,(3-x^2-3y^2) = 0 & \Rightarrow y=0 \text{ EL. } 3-x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

STATIONÄRA PUNKTER:

$(0,0)$; $(0,\pm1)$; $(\pm1,0)$ (ALLA I D's INRE)

$f(0,0) = 0$

$f(0,\pm1) = 3\cdot e^{-1}$

$f(\pm1,0) = e^{-1}$

SVAR: $\begin{cases} f(0,0) = 0 & \text{MINPUNKT} \\ f(0,\pm1) = 3e^{-1} & \text{MAXPUNKTER} \end{cases}$

$\boxed{4.19}$ BESTÄM STÖRSTA OCH MINSTA VÄRDE AV

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{-x-y}, \quad (x,y) \in D = \{0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty\}.$$

PÅ RANDEN:

$x=0$: $f(0,y) = ye^{-y} = g_1(y)$

$g_1'(y) = e^{-y} + y\cdot(-1)\cdot e^{-y} = (1-y)e^{-y} = 0 \Rightarrow y = 1$

$y=1$: $f(0,1) = e^{-1}$

$y=0$: $f(x,0) = x^2e^{-x} = g_2(x)$

$g_2'(x) = 2xe^{-x} + x^2\cdot(-1)\cdot e^{-x} = (2-x)\cdot x\cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

$x=0$: $f(0,0) = 0$

$x=2$: $f(2,0) = 4e^{-2}$

I DET INRE AV D:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x-y} - (x^2+y)e^{-x-y} = (2x-x^2-y)e^{-x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x-y} - (x^2+y)e^{-x-y} = (1-x^2-y)e^{-x-y}$$

grad $f = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x - x^2 - y = 0 \\ 1 - x^2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

STATIONÄR PUNKT: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = e^{-5/4}$$

DÅ $x \to \infty$ EL. $y \to \infty$ SÅ $f(x,y) \to 0$ TY e^{-x-y} AVTAR SNABBARE ÄN VAD x^2+y VÄXER.

SVAR: $\begin{cases} f(2,0) = 4e^{-2} & \text{MAXPUNKT} \\ f(0,0) = 0 & \text{MINPUNKT} \end{cases}$

$\boxed{4.22}$ $f(x,y) = (x^2+xy+y^2)e^{-x-2y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

HAR f NÅGOT STÖRSTA / MINSTA VÄRDE?

LÄGG MÄRKE TILL ATT

$$x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

SAMT

$$e^{-x-2y} > 0$$

VILKET VISAR ATT $f(x,y) \geq 0$. ATT $f(x,y)$ ANTAR VÄRDET 0 FÅR VI FRÅN

$$f(0,0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

SÅLEDES HAR f MINSTA VÄRDET 0.

DOCK HAR f EJ NÅGOT STÖRSTA VÄRDE, TY

$$f(x,0) = x^2 e^{-x} \longrightarrow \infty \quad \text{DÅ} \quad x \longrightarrow -\infty$$

SAMMANFATTNING - LEKTION 5

BEGREPP:
- OPTIMERING (s. 157)
- KOMPAKT MÄNGD (s. 15)
- INRE PUNKTER / RANDPUNKTER (s. 11)
  DESS BETYDELSE I OPTIMERING (s. 159)

SATSER:
- EXISTENS AV MAX/MINVÄRDEN OCH KOMPAKTA DEFINITIONSMÄNGDER, SATS 4 (s. 41)
- LOKALA EXTREMVÄRDEN, SATS 11 (s. 99) SAMT SATS 12 (s. 111)