LEKTION 6   13/2/08   SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{4.25}$ LÅT $f(x,y) = x^2+y^2$

$$g(x,y) = 13x^2+13y^2+10xy-72$$

HITTA MAX- OCH MINVÄRDE TILL f UNDER VILLKORET $\overset{(iii)}{\vee}$ $g(x,y)=0$.

BÅDE D_f $(=\mathbb{R}^2)$ OCH D_g (= ELLIPSEN) HAR ENDAST INRE PUNKTER SÅ SATS 1 (s. 173) KAN TILLÄMPAS, D.V.S. VI SÖKER PUNKTER (x,y) SÅDANA ATT

$$\text{grad } f(x,y) = \lambda \cdot \text{grad } g(x,y)$$

DÄR $\lambda \in \mathbb{R}$. DETTA GER

$$\begin{cases} 2x = \lambda\cdot(26x+10y) & (i) \\ 2y = \lambda\cdot(26y+10x) & (ii) \end{cases}$$

TILLSAMMANS MED VILLKORET $g(x,y)=0$ (iii).

$$(i) \Rightarrow \lambda = \frac{2x}{26x+10y} = \frac{x}{13x+5y} \quad (i')$$

$$(i') \,\&\, (ii) \Rightarrow \frac{2y}{26y+10x} = \frac{x}{13x+5y} \Rightarrow y(13x+5y) = x(13y+5x)$$

$$\Rightarrow 5y^2 = 5x^2 \Rightarrow x^2-y^2=0 \quad (*)$$

~~[illegible]~~ $\cancel{13x^2+y^2+\frac{10}{13}xy - \frac{72}{13} = 13\cdot(x+\frac{5}{13}y)^2}$

$$(*) \,\&\, (iii) \Rightarrow 13x^2+13x^2 \pm 10x^2 - 72 = 0 \quad (x^2=y^2 \Leftrightarrow x=\pm y)$$

$\underset{\sim}{x=y}$: $\quad 36x^2-72=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$\underset{\sim}{x=-y}$: $\quad 16x^2-72=0 \Rightarrow 2x^2=9 \Rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}) = 2+2 = 4, \qquad f\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \mp\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}+\frac{9}{2} = 9$$

EFTERSOM $f(x,y)$ ÄR KVADRATEN AV AVSTÅNDET FÅR VI ATT

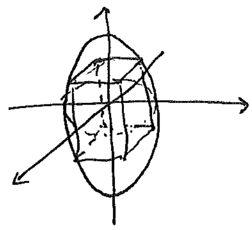
$$\begin{cases} \text{MINSTA AVSTÅNDET} = 2 & \left(=\sqrt{f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})}\right) \\ \text{STÖRSTA AVSTÅNDET} = 3 & \left(=\sqrt{f(\pm 3/\sqrt{2}, \mp 3/\sqrt{2})}\right) \end{cases}$$

4.29

EN PARALLELLEPIPED MED KANTERNA PARALLELLA MED AXLARNA ÄR INSKRIVEN I ELLIPSOIDEN

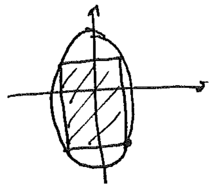
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

VILKEN ÄR DEN STÖRSTA VOLYM P.E. KAN ANTA?



P.E. HAR ETT HÖRN I KVADRANTEN $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$

OM DETTA HÖRN HAR KOORDINATEN (x, y, z) SÅ GES P.E.'S VOLYM AV



$$2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$$

SÅLEDES HAR VI PROBLEMET

MAXIMERA $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ UNDER VILLKOREN $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$

DÄR $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$

UPPENBARLIGEN MÅSTE $x > 0, y > 0, z > 0$ FÖR ~~ATT~~ f SKA MAXIMERAS (ANNARS SKULLE MAXVOLYMEN VARA NOLL) SÅ DEN ALTERNATIVA VERSIONEN AV SATS 1 (S.177) KAN TILLÄMPAS. D.V.S. SÖK (x, y, z) SÅDANA ATT

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x,y,z), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y,z) = 0 \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \end{cases}$$

DETTA GER

$$\begin{aligned} &(i) \quad yz = \lambda \cdot \frac{2x}{a^2} \\ &(ii) \quad xz = \lambda \cdot \frac{2y}{b^2} \\ &(iii) \quad xy = \lambda \cdot \frac{2z}{c^2} \end{aligned} \iff \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \frac{xyz}{2\lambda} \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{xyz}{2\lambda} \\ \frac{z^2}{c^2} &= \frac{xyz}{2\lambda} \end{aligned}$$

LÅT $t = \frac{xyz}{2\lambda}$, DÅ GER $g(x,y,z) = 0$ ATT

$$3t - 1 = 0 \implies t = \frac{1}{3} \implies xyz = \frac{2}{3}\lambda$$

D.V.S. DEN MAXIMALA VOLYMEN INTRÄFFAR DÅ λ ÄR MAXIMAL.

$\boxed{4.29}$ (FORTS.) VI LÖSER NU UT λ FRÅN (i)–(iii) OCH VILLKORET $g(x,y,z)=0$.

$$(i)\&(ii) \Rightarrow \frac{a^2yz}{2\lambda}\cdot z = \lambda\cdot\frac{2y}{b^2} \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} z^2 = \left(\frac{2\lambda}{ab}\right)^2$$

$$(i)\&(iii) \Rightarrow y\cdot\frac{c^2xy}{2\lambda} = \lambda\cdot\frac{2x}{a^2} \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} y^2 = \left(\frac{2\lambda}{ac}\right)^2$$

$$(ii)\&(iii) \Rightarrow x\cdot\frac{b^2xz}{2\lambda} = \lambda\cdot\frac{2z}{c^2} \overset{z\neq 0}{\Longrightarrow} x^2 = \left(\frac{2\lambda}{bc}\right)^2$$

SÄTT IN I $g(x,y,z)=0$:

$$3\cdot\left(\frac{2\lambda}{abc}\right)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{abc}{2}\right)^2$$

DEN MAXIMALA VOLYMEN GES AV $8\cdot f(x,y,z) = 8\cdot\frac{2}{3}\cdot\lambda$, D.V.S

$$8\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{abc}{2} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}} \quad \text{(MAX VOLYM)}$$

$\boxed{4.32}$ MAXIMERA $f(x,y,z) = x+y+z$ PÅ SKÄRNINGEN AV YTORNA

(i) $x^2+y^2+z^2=2$ (SFÄR)

(ii) $x^2+y^2-z=0$ (KON)

HÄR KAN MAN NÄSTAN "SE" ATT SKÄRNINGEN BLIR EN CIRKEL, MEN LÅT OSS VISA DETTA.

FRÅN (ii) FÅR VI

$$z = x^2+y^2$$

SÄTT IN I (i)

$$z+z^2=2 \Rightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = 1 \\ z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = -2 \end{cases}$$

EFTERSOM $z=x^2+y^2$ SÅ MÅSTE $z \geq 0$, D.V.S. VI KAN FÖRKASTA DEN NEGATIVA ROTEN. SÅLEDES $z=1$. SÄTT IN I (i)

$$x^2+y^2+1=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

VILKET VISAR ATT SKÄRNINGEN ÄR EN CIRKEL AV RADIE 1.

VI HAR NU PROBLEMET ATT MAXIMERA FUNKTIONEN

$$f(x,y,1) = x+y+1 \quad \text{DÅ} \quad x^2+y^2=1$$

UPPENBARLIGEN ÄR DENNA SOM STÖRST DÅ $x>0$ OCH $y>0$.

LÖS UT y SOM FUNKTION AV x:

$$y^2 = 1-x^2 \xRightarrow{y>0} y = \sqrt{1-x^2}$$

VILKET GER

$$f(x, \sqrt{1-x^2}, 1) = x+\sqrt{1-x^2}+1 =: h(x)$$

VI SÖKER NU MAXVÄRDEN TILL $h(x)$.

$\boxed{4.32}$

(FORTS.)

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \overset{x>0}{\Rightarrow} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

VI FÅR $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = 1$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \sqrt{2}$$

ATT DETTA VERKLIGEN ÄR ~~ETT~~ MAXIMUM (OCH INTE MIN) INSES GENOM ATT $f(1,0,1) = 2$ (ELLER TESTA MED ANNAN GODTYCKLIG PUNKT ~~DÄR~~ DÄR $x^2+y^2=1$ OCH $z=1$).

SVAR: MAX FÖR f ÄR $1+\sqrt{2}$.

SAMMANFATTNING – LEKTION 6

BEGREPP

- OPTIMERING MED ETT (s.172) ELLER FLERA (s.178) BIVILLKOR
- LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD (s. 174)

SATSER

- NÖDVÄNDIGA VILLKOR FÖR INRE PUNKTER OCH EXTREMVÄRDEN UNDER OPTIMERING MED BIVILLKOR:
  + SATS 1 (s.173): TVÅ DIM., ETT BIVILLKOR
  + VARIANT AV SATS 1 (s.177): n DIM., ETT BIVILLKOR
  + SATS 2 (s.179): n DIM., p BIVILLKOR

SE SPECIELLT EKV. (3') (s.174)

$$\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g \qquad \text{(LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD)}$$