 BJÖRN WINCKLER winckler@kth.se

$\boxed{6.1}$ LÅT $\Delta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, BERÄKNA

$$I := \iint_\Delta (xy + y^2)\,dx\,dy$$

VI ANVÄNDER SATS 2 (s. 235).

$$I = \iint_\Delta xy\,dxdy + \iint_\Delta y^2\,dxdy \qquad (\text{EKV. (14) s. 241})$$

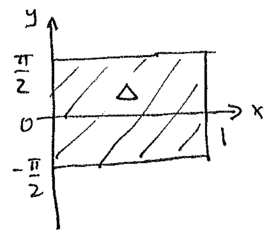
$$= \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 y\,dy + \int_0^1 dx \int_0^1 y^2\,dy \qquad (\text{SATS 2, s. 235})$$

$$= \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 + 1 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$\boxed{6.4}$ LÅT $\Delta = \{ (x,y) : 0 \le x \le 1 , -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \}$, BERÄKNA

$$I := \iint_{\Delta} y \cdot \sin(y + xy) \, dx \, dy$$



ANVÄND SATS 2 (S. 235) OCH INTEGRERA ÖVER X FÖRST:

$$I = \int_{y=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{x=0}^{1} y \cdot \sin(y + xy) \, dx \right) dy \qquad \text{(SATS 2, S. 235)}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\Big[\cos(y + xy) \Big]_0^1 \, dy$$

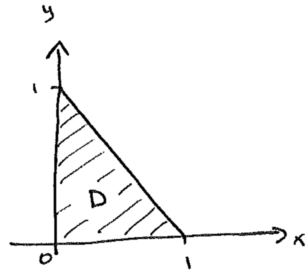
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(y) - \cos(2y) \right) dy$$

$$= \Big[\sin y - \tfrac{1}{2} \cdot \sin(2y) \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2$$

6.10

BERÄKNA

$$I := \iint_D \frac{y}{1+x}\,dx\,dy$$



OMRÅDET D BEGRÄNSAS AV KOORDINATAXLARNA OCH LINJEN

$$x + y = 1$$

VI ANVÄNDER SATS 4 (s. 246) FÖR ATT BERÄKNA I:

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} \frac{y}{1+x}\,dy \right) dx \qquad \text{(SATS 4, s. 246)}$$

$$= \int_{x=0}^{1} (1+x)^{-1} \left(\int_{y=0}^{1-x} y\,dy \right) dx \qquad \text{(EKV. (13), s. 241)}$$

$$= \int_0^1 (1+x)^{-1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx \qquad \text{(EKV. (13), s. 241)}$$

POLYNOMDIVISION GER:

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ \hline 1+x & 1-2x+x^2 \\ & -(x+x^2) \\ \hline & 1-3x \\ & -(-3-3x) \\ \hline & 4 \end{array} \implies \frac{(1-x)^2}{1+x} = x - 3 + \frac{4}{1+x}$$

SÅLEDES

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 3 + \frac{4}{1+x} \right) dx$$

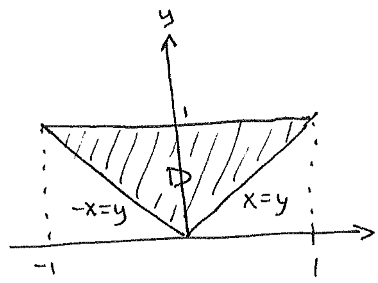
$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^1 x\,dx - 3 \int_0^1 dx + 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right\} \qquad \text{(EKV. (13) \& (14), s. 241)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot \left[\ln(1+x) \right]_0^1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} - 3 + 4 \cdot \ln 2 \right\} = -\frac{5}{4} + 2 \cdot \ln 2$$

$\boxed{6.14}$ LÅT $D = \{(x,y) : |x| \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\}$, BERÄKNA

$$I := \iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy$$



OMRÅDET D BEGRÄNSAS AV LINJERNA

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = y \\ -x = y \end{cases}$$

VI ANVÄNDER SATS 4 (s.246) OCH INTEGRERAR FÖRST ÖVER x:

$$I = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=-y}^{y} e^{-y^2}\,dx\right)dy \qquad (\text{SATS } 4,\ \text{s. } 246)$$

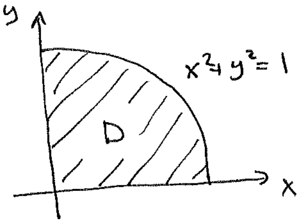
$$= \int_{y=0}^{1} e^{-y^2}\left(\int_{x=-y}^{y} dx\right)dy \qquad (\text{EKV. } (13),\ \text{s. } 241)$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot 2y\,dy$$

$$= -\left[e^{-y^2}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$$

$\boxed{6.16}$ LÅT $D = \{ (x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1 \}$, BERÄKNA

$$I := \iint_D \frac{xy}{(1+y^2)^2}\, dx\, dy$$



INTEGRERA ÖVER y FÖRST

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{(1+y^2)^2}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x \cdot \frac{1}{2} \Big[-(1+y^2)^{-1} \Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \left(1 - \frac{1}{1+1-x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{2-x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log (2-x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log 2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \log 2$$

SAMMANFATTNING — LEKTION 7

BEGREPP: — ITERERADE INTEGRALER (EKV. (6), S.231

SATSER: — BERÄKNING AV DUBBELINTEGRALER, SATS 2 (S.235) FÖR REKTANGULÄRA OMRÅDEN, SAMT SATS 4 (S.246) FÖR GODTYCKLIGA OMRÅDEN

— RÄKNEREGLER FÖR INTEGRALER, EKV. (13)–(17) (S.241–242) (MEMORERA DESSA!)