LEKTION 9 20/2/2008 SF1648

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{6.37}$ LÅT $D = \{(x,y): 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}$, VISA ATT

$$I := \iint_D \frac{dx\,dy}{x+y}$$

ÄR KONVERGENT.

LÄGG MÄRKE TILL ATT INTEGRANDEN ÄR POSITIV, SAMT ATT DEN ÄR OBEGRÄNSAD I ORIGO. FÖR ATT VISA ATT INTEGRALEN ÄR KONVERGENT MÅSTE VI VISA ATT DEN ITERERADE INTEGRALEN ÄR ÄNDLIG.

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}\frac{dy}{x+y}\right)dx = \int_{x=0}^{1}\Big[\ln(x+y)\Big]_{y=0}^{1-x}dx = \int_{x=0}^{1}(\ln 1 - \ln x)\,dx$$

$$= -\int_0^1 \ln x\,dx = -\Big[x\ln x\Big]_0^1 + \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -1\cdot\ln 1 + \lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\cdot\ln\varepsilon + 1 = 1$$

EFTERSOM ATT DEN ITERERADE INTEGRALEN ÄR ÄNDLIG SÅ ÄR OCKSÅ DEN URSPRUNGLIGA DUBBELINTEGRALEN KONVERGENT

OCH

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} = 1$$

$\boxed{6.41}$ FÖR VILKA $\alpha \in \mathbb{R}$ ÄR

$$(*) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

KONVERGENT ?

INTEGRANDEN ÄR POSITIV SÅ INTEGRALEN KONVERGERAR OM OCH ENDAST OM DEN ITERERADE INTEGRALEN ÄR ÄNDLIG:

$$\int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \right) dx = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{\infty} \frac{r \cdot dr}{(r^2)^{\alpha/2}} \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = 2\pi \cdot \int_{r=0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$$

OM $\alpha = 2$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{r} = \left[\ln r \right]_0^{\infty} = \infty$$

SÅ $(*)$ DIVERGERAR DÅ $\alpha = 2$.

OM $\alpha \neq 2$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = \left[\frac{1}{-\alpha+2} r^{-\alpha+2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{-\alpha+2} \cdot \left\{ \lim_{r\to\infty} r^{-\alpha+2} - \lim_{r\to 0} r^{-\alpha+2} \right\}$$

DET FÖRSTA GRÄNSVÄRDET EXISTERAR OM OCH ENDAST OM (OMM) $-\alpha+2 \leq 0$, DET ANDRA OMM $-\alpha+2 \geq 0$. EFTERSOM $\alpha \neq 2$ SÅ KAN INTE BÄGGE GRÄNSVÄRDEN EXISTERA SAMTIDIGT;

SÅLEDES FÅR VI ATT $(*)$ DIVERGERAR FÖR $\alpha \neq 2$,

D.V.S. INTEGRALEN $(*)$ ÄR DIVERGENT FÖR ALLA $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{6.43}$ ÄR FÖLJANDE INTEGRAL KONVERGENT EL. DIVERGENT?

$$I := \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2\,dx\,dy}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

LÅT D VARA ENHETSSKIVAN OCH $D^c = \mathbb{R}^2 \setminus D$ DESS KOMPLEMENT I $\mathbb{R}^2$. VI KAN SKRIVA

$$I = \underbrace{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{:= I_1} + \underbrace{\iint_{D^c} f(x,y)\,dx\,dy}_{:= I_2}$$

EFTERSOM ATT $1+x^2 \geq 1$ FÅR VI

$$I_1 \leq \iint_D \frac{x^2\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} \frac{r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot r\,dr}{r^3} \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \cdot \int_{r=0}^{1} dr < \infty$$

FÖR ATT UPPSKATTA I_2 ANVÄNDER VI ATT $\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1$;

$$I_2 \leq \iint_{D^c} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=1}^{\infty} \frac{r \cdot dr}{r^3} \right) d\varphi = 2\pi \cdot \left[\cancel{4} - r^{-1} \right]_1^{\infty}$$

$$= 2\pi < \infty$$

SÅLEDES ÄR I KONVERGENT, TY

$$I = I_1 + I_2 < \infty$$

$\boxed{6.44}$ LÅT $D = \{ (x,y) : x^2+y^2 \le 1 \}$, ÄR

$$\iint_D \frac{x^2+1}{x^2(x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\,dy$$

KONVERGENT ELLER DIVERGENT ?

OBSERVERA ATT

$$\frac{x^2+1}{x^2} \geq 1$$

SÅ

$$\iint_D \frac{x^2+1}{x^2(x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\,dy > \iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

MEN INTEGRALEN I HL ÄR DIVERGENT SÅ INTEGRALEN I VL MÅSTE OCKSÅ VARA DIVERGENT.

VI VISAR ATT HL ÄR DIVERGENT GENOM ATT BETRAKTA DEN ITERERADE INTEGRALEN:

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} \frac{r \cdot dr}{(r^2)^{3/2}} \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \left[-r^{-1} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} - 1 \right) = \infty$$

SAMMANFATTNING – LEKTION 9

BEGREPP: – KONVERGENT / DIVERGENT DUBBELINTEGRAL, DEFINITION 5 (s. 275) (POSITIV INTEGRAND), SAMT DEFINITION PÅ s. 282 FÖR INTEGRAND MED VÄXLANDE TECKEN

SATSER: – VILLKOR FÖR KONVERGENS, MITTEN AV S. 276

– INTEGRATION MED HJÄLP AV NIVÅKURVOR, EKV. (29) (s. 271)