LEKTION 11 26/2/2008 SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

$\boxed{8.4}$ LÅT $K = \{x^2+y^2+z^2 \leq 49\}$, LÅT $H = \{x^2+y^2-z^2+1=0\}$.

H DELAR K I TRE DELAR. TVÅ AV DESSA HAR SAMMA VOLYM; BERÄKNA DENNA.

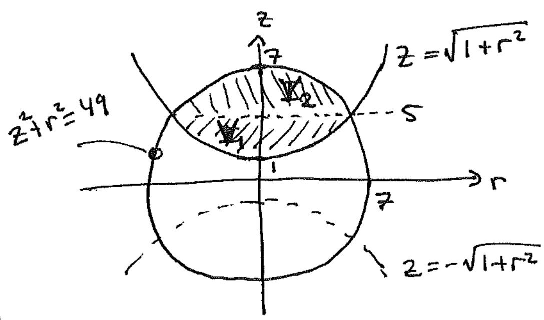
FÖRST FÖRSÖKER VI FÅ EN BILD AV HUR VOLYMEN SER UT. OM VI ÖVERGÅR TILL POLÄRA KOORDINATER I (X,Y)-PLANET FÅR VI

$$K = \{z^2+r^2 \leq 49\}, \quad H = \{z^2 = 1+r^2\}$$

VI KAN SKISSERA RANDEN GENOM ATT LÖSA UT Z SOM EN FUNKTION AV r:

$$\partial K: \quad z = \pm\sqrt{49-r^2}$$

$$H: \quad z = \pm\sqrt{1+r^2}$$



FRÅN FIGUREN SER VI TVÅ DELAR SOM HAR SAMMA VOLYM. BETRAKTA DEN ÖVRE:

SKÄRNINGEN MELLAN ∂K OCH H I ÖVRE HALVPLANET FÅS FRÅN

$$\sqrt{49-r^2} = z = \sqrt{1+r^2} \implies 49-r^2 = 1+r^2 \implies r^2 = \frac{49-1}{2} = 24$$

$$r^2 = 24 \implies z = \sqrt{1+24} = 5$$

VOLYMEN AV OMRÅDET V SOM SKA BERÄKNAS FÅS SOM EN TRIPPELINTEGRAL ÖVER V:

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

DENNA INTEGRAL BERÄKNAR VI GENOM ATT DELA UPP V I TVÅ DELAR (SE FIG.) $V = V_1 \cup V_2$, SAMT GENOM ÖVERGÅNG TILL POLÄRA KOORDINATER I (X,Y)-PLANET.

V_1 DEFINIERAS AV $1 \leq z \leq 5$ OCH $0 \leq r \leq \sqrt{z^2-1}$

V_2 —— II —— $5 \leq z \leq 7$ OCH $0 \leq r \leq \sqrt{49-z^2}$

$\boxed{8.4}$

(FORTS.)

BERÄKNA INTEGRALERNA

$$I_1 = \iiint_{V_1} dx\,dy\,dz = \int_{z=1}^{5} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{z^2-1}} r \cdot dr\, d\varphi \right) dz$$

$$= \int_{z=1}^{5} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{\sqrt{z^2-1}} r \cdot dr \right) dz$$

$$= \int_{z=1}^{5} 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[r^2 \right]_0^{\sqrt{z^2-1}} dz = \pi \cdot \int_1^5 (z^2-1)\, dz = \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \left[z^3 \right]_1^5 - 1 \cdot 4 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left(125 - 1 - 12 \right) = \frac{112 \cdot \pi}{3}$$

$$I_2 = \iiint_{V_2} dx\,dy\,dz = \int_{z=5}^{7} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{49-z^2}} r\,dr\,d\varphi \right) dz$$

$$= \int_{z=5}^{7} 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[r^2 \right]_0^{\sqrt{49-z^2}} dz = \pi \cdot \int_5^7 (49 - z^2)\, dz = \pi \cdot \left(49 \cdot 2 - \frac{1}{3} \left[z^3 \right]_5^7 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left(294 - 343 + 125 \right) = \frac{76 \cdot \pi}{3}$$

SLUTLIGEN FÅR VI VOLYMEN AV V

$$\mathrm{Vol}(V) = I_1 + I_2 = \frac{188 \cdot \pi}{3}$$

$\boxed{8.13}$ BERÄKNA VOLYMEN AV ELLIPSOIDEN

$$E = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

VOLYMEN GES AV TRIPPELINTEGRALEN

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz$$

FÖR ATT BERÄKNA DENNA INTEGRAL BYTER VI KOORDINATER

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \qquad \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

DETTA KOORDINATBYTE AVBILDAR ENHETSBOLLEN B PÅ E, SÅLEDES FÅR VI ATT

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \iiint_B \left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw =$$

$$= abc \iiint_B du\,dv\,dw = abc \cdot \mathrm{Vol}(B) = abc \cdot \frac{4\pi}{3}$$

OM MAN INTE KOMMER IHÅG VOLYMEN AV ENHETSBOLLEN SÅ KAN MAN ISTÄLLET BERÄKNA DEN GENOM ÖVERGÅNG TILL SFÄRISKA KOORDINATER:

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta, & 0 \leq r \leq 1, \\ v = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ w = r \cdot \cos\theta, & 0 \leq \theta < \pi, \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(r,\varphi,\theta)} = r^2 \sin\theta$$

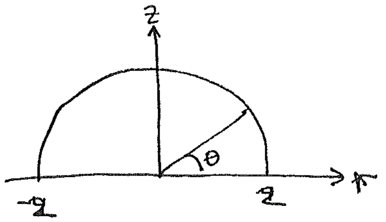
$$\mathrm{Vol}(B) = \iiint_B du\,dv\,dw = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r=0}^{1} r^2 dr = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left[r^3\right]_0^1$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$\boxed{8.16}$ $\quad Y = \{ x^2+y^2+z^2 = 4, \quad z \geq 1 \}$

a) PARAMETERFRAMSTÄLLNING.



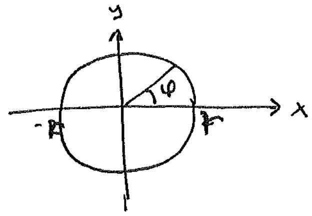
"FRÅN SIDAN"

$r = 2\cdot\cos\theta$

$z = 2\sin\theta$

$\pi/6 \leq \theta < \pi/2$

$z = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$



"OVANIFRÅN"

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

TILLSAMMANS:

$$\begin{cases} x = 2\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y = 2\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ z = 2\cdot\sin\theta \end{cases}$$

(SFÄRISKA KOORDINATER)

$0 \leq \theta < \pi/2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

b) NORMALVEKTOR.

LÅT $\bar{r} = (x, y, z)$. DÅ ÄR $\bar{r}'_\theta$ OCH $\bar{r}'_\varphi$ TANGENTVEKTORER

OCH $\bar{r}'_\theta \times \bar{r}'_\varphi$ EN NORMALVEKTOR:

$$\bar{r}'_\theta = 2\cdot(-\sin\theta\cdot\cos\varphi, \ -\sin\theta\cdot\sin\varphi, \ \cos\theta)$$

$$\bar{r}'_\varphi = 2\cdot(-\cos\theta\cdot\sin\varphi, \ \cos\theta\cdot\cos\varphi, \ 0)$$

$$\bar{r}'_\theta \times \bar{r}'_\varphi = 4(-\cos^2\theta\cdot\cos\varphi, \ -\cos^2\theta\cdot\sin\varphi, \ -\cos\theta\cdot\sin\theta)$$

$$= -2\cos\theta\cdot(2\cos\theta\cdot\cos\varphi, \ 2\cos\theta\cdot\sin\varphi, \ 2\sin\theta)$$

$$= -2\cos\theta\cdot(x, y, z)$$

SÅ (x, y, z) ÄR EN NORMALVEKTOR.

$\boxed{8.16}$

(FORTS.)

c) BERÄKNA AREAN AV Y.

$$\text{Area}(Y) = \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\bar{r}'_\theta \times \bar{r}'_\varphi| \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2\cos\theta \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, d\theta \, d\varphi = 4 \cdot \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$

$$= 4 \cdot \left[\sin\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} \cdot 2\pi = 8\pi \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = 4\pi$$

d) BERÄKNA AREAN AV $S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2, \ z \geq h\}$, DÄR $0 \leq h \leq R$.

ANVÄND SAMMA PARAMETRISERING, MEN BYT UT 2 MOT R.

$$z = h \Rightarrow \sin\theta = \frac{h}{R} \qquad \sin^{-1}\frac{h}{R} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Area}(S) = \int_{\theta=\sin^{-1}\frac{h}{R}}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\bar{r}'_\theta \times \bar{r}'_\varphi| \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= R^2 \cdot \left[\sin\theta\right]_{\theta=\sin^{-1}\frac{h}{R}}^{\pi/2} \cdot 2\pi = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$\boxed{8.17}$ BERÄKNA AREAN AV TORUSEN T:

$$\begin{cases} x = (2-\cos t)\cos s & -\pi \le s \le \pi \\ y = (2-\cos t)\sin s & -\pi \le t \le \pi \\ z = \sin t \end{cases}$$

MED DEN GIVNA PARAMETRISERINGEN GES AREAN AV

$$\text{Area}(T) = \iint_{\substack{-\pi \le s \le \pi \\ -\pi \le t \le \pi}} |\bar{r}_t' \times \bar{r}_s'| \, ds dt$$

BERÄKNA NORMALEN

$$\bar{r}_t' = (\sin t \cdot \cos s, \ \sin t \cdot \sin s, \ \cos t)$$

$$\bar{r}_s' = (-(2-\cos t)\sin s, \ (2-\cos t)\cdot \cos s, \ 0)$$

$$\bar{r}_t' \times \bar{r}_s' = \Big(-(2-\cos t)\cos s \cdot \cos t, \ -(2-\cos t)\sin s \cdot \cos t, \ \underbrace{(2-\cos t)\sin t \cdot \cos^2 s + (2-\cos t)\cdot \sin t \cdot \sin^2 s}_{=(2-\cos t)\sin t \cdot (\cos^2 s + \sin^2 s)}\Big)$$

$$= -(2-\cos t)\cdot (\cos s \cdot \cos t, \ \sin s \cdot \cos t, \ \sin t)$$

$$|\bar{r}_t' \times \bar{r}_s'| = (2-\cos t)\sqrt{\underbrace{\cos^2 s \cdot \cos^2 t + \sin^2 s \cdot \cos^2 t}_{=\cos^2 t \cdot (\cos^2 s + \sin^2 s)} + \sin^2 t}$$

$$= (2-\cos t)\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = (2-\cos t) \qquad (>0)$$

SÅLEDES FÅR VI

$$\text{Area}(T) = \int_{s=-\pi}^{\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} (2-\cos t)\, ds dt = 2\cdot(2\pi)^2 - 2\pi \cdot [\sin t]_{-\pi}^{\pi} = 8\pi^2$$

SAMMANFATTNING – LEKTION 11

BEGREPP:
- VOLYMBERÄKNINGAR MED HJÄLP AV DUBBELINTEGRAL (EKV. (1)&(2), S. 299), SAMT TRIPPELINTEGRAL (EKV. (3), S. 299)
- AREA AV BUKTIG YTA (S. 304)
- SKRIVSÄTTET dS FÖR PARAMETEROBEROENDE AREAELEMENT (S. 305)

SATSER:
- AREABERÄKNING OBEROENDE AV PARAMETRISERING (EX 5, S. 306)
- FORMEL FÖR BERÄKNING AV BUKTIG YTA (EKV. (6), S. 305)