LEKTION 12 27/2/2008 SF1646

BJÖRN WINCKLER
winckler@kth.se

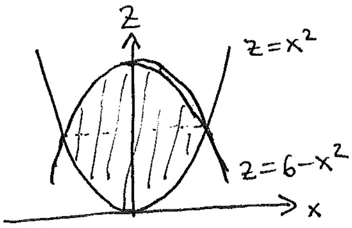
8.25 LÅT K VARA DEN KROPP SOM BEGRÄNSAS AV YTORNA

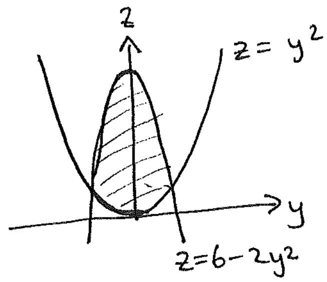
$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - 2y^2 & : Y_1 \\ z = x^2 + y^2 & : Y_2 \end{cases}$$

K ÄR HOMOGEN MED DENSITET 1, BERÄKNA DESS TRÖGHETSMOMENT M.A.P. z-AXELN. D.V.S. BERÄKNA

$$I := \iiint_K (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

VI BÖRJAR MED ATT BILDA OSS EN UPPFATTNING OM K:s GEOMETRI GENOM ATT SKISSERA Y_1 OCH Y_2:S SKÄRNING MED (x,z)- OCH (y,z)-PLANEN.





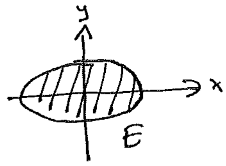
VI KAN INTE ENKELT INTEGRERA ÖVER (x,y)-PLANET FÖRST P.G.A. ATT SKÄRNINGEN MELLAN Y_1 OCH Y_2 INTE SKER PÅ ETT KONSTANT z-VÄRDE. ISTÄLLET INTEGRERAR VI ÖVER z FÖRST, D.V.S. VI LÅTER z LÖPA ÖVER $x^2+y^2 \le z \le 6-x^2-2y^2$.

$$I = \iint_E \left(\int_{z=x^2+y^2}^{6-x^2-2y^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy \right) dz$$

OMRÅDET E SOM (x,y) LÖPER ÖVER ÄR BEGRÄNSAD AV PROJICERINGEN AV SKÄRNINGEN MELLAN Y_1 OCH Y_2 PÅ (x,y)-PLANET, D.V.S

$$Y_1 = Y_2 \implies x^2+y^2 = 6-x^2-2y^2 \implies 2x^2+3y^2=6 \implies \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$$

$$E = \left\{ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2} \le 1 \right\}$$



$\boxed{8.25}$

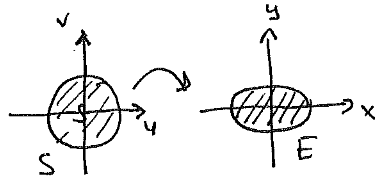
(FORTS.)

$$I = \iint_E \left(\int_{z=x^2+y^2}^{6-x^2-2y^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy \right) dz = \iint_E (x^2+y^2)\left(6-x^2-2y^2-(x^2+y)\right)dx\,dy$$

$$= \iint_E (x^2+y^2)(6-2x^2-3y^2)\,dx\,dy$$

VI BYTER KOORDINATER SÅ ATT VI INTEGRERAR ÖVER EN CIRKEL ISTÄLLET FÖR ELLIPS:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cdot u \\ y = \sqrt{2}\cdot v \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{6}$$



$$I = \iint_S (3u^2+2v^2)(6-6u^2-6v^2)\cdot\sqrt{6}\cdot du\,dv = 6\sqrt{6}\iint_S (3u^2+2v^2)(1-u^2-v^2)\,du\,dv$$

$$= 6\sqrt{6}\cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} (3r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi)(1-r^2)\,r\,dr \right) d\varphi$$

$$= 6\sqrt{6}\left(3\int_{\varphi=0}^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi \int_{r=0}^{1}(r^3-r^5)\,dr + 2\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_{r=0}^{1}(r^3-r^5)\,dr\right)$$

$$= 6\sqrt{6}\cdot\left(3\cdot\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 + 2\cdot\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1\right) = 6\cdot\sqrt{6}\cdot 5\pi\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

$$= 5\cdot\sqrt{6}\cdot 6\cdot\pi\cdot\frac{2}{24} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{6}\cdot\pi}{2}}}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \left[t\cdot\cos^2 t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} t\cdot \underbrace{2\cos t\sin t}_{\sin(2t)}\,dt = 2\pi + \underbrace{\left[-t\cdot\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{2\pi}}_{=-\pi} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\,dt}_{=0}$$

$$= \pi$$

$\boxed{8.29}$ BERÄKNA MASSCENTRUM FÖR DEN HOMOGENA KROPPEN

$$K: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2, \qquad x \ge 0, \quad z \ge 0$$

DENSITETEN ÄR 1 SÅ KROPPENS MASSA ÄR

$$m = \iiint_K dx\,dy\,dz$$

K ÄR EN "FJÄRDEDELS BOLL" MED RADIE R SÅ BYT TILL SFÄRISKA KOORDINATER:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} 0 \le\ & \theta \le \pi/2 \\ -\pi/2 \le\ & \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le\ & r \le R \end{aligned}$$

$$m = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^R r^2\, dr = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} \cdot \pi \cdot \frac{R^3}{3}$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}$$

MASSCENTRUM GES AV

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_K x\, dx\,dy\,dz = \frac{1}{m} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^R r^3\, dr = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \Big[\sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{3}{\pi R^3} \cdot \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3R}{8}$$

AV SYMMETRISKÄL FÅR VI ATT $y_c = 0$, $z_c = x_c$, SÅ

$$(x_c, y_c, z_c) = \left(\frac{3R}{8}, 0, \frac{3R}{8} \right)$$

$\boxed{8.32}$ BERÄKNA MASSCENTRUM FÖR DEN HOMOGENA KROPPEN

$$K: \quad x^2 + 4y^2 \le z \le 1$$

AV SYMMETRISKÄL BLIR $x_c = y_c = 0$. VI BEHÖVER ENDAST BERÄKNA MASSCENTRUM I z-LED, SOM GES AV

$$(*) \qquad z_c = \frac{\iiint_K z \, dx\,dy\,dz}{\mathrm{Vol}(K)}$$

VI BERÄKNAR VOLYMEN AV K FÖRST:

$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz$$

FÖR FIXT z SÅ LÖPER (x,y) I ELLIPSEN $x^2+4y^2 \le z$. VI INTEGRERAR ÖVER (x,y)-PLANET FÖRST OCH BYTER KOORDINATER I TVÅ STEG

$$\begin{cases} x = u \\ y = v/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta/2 & r\cos\theta/2 \end{vmatrix}$$

$$= 2^{-1} r\cos^2\theta + 2^{-1} r \sin^2\theta = \frac{r}{2}$$

$$u^2+v^2 \le z \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{z}$$

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_{z=0}^{1} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{z}} \frac{r}{2}\, dr\, d\varphi \right) dz = \frac{1}{2} \int_{z=0}^{1} 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[r^2 \right]_0^{\sqrt{z}} dz$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 z\, dz = \frac{\pi}{4}$$

TÄLJAREN I $(*)$ BERÄKNAS PÅ SAMMA SÄTT; DEN ENDA SKILLNADEN ÄR INTEGRANDEN z (ISTÄLLET FÖR 1). VI FÅR

$$\iiint_K z\, dx\,dy\,dz = \cdots = \frac{\pi}{2} \int_0^1 z^2\, dz = \frac{\pi}{6} \left[z^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

SLUTLIGEN GES $z_c = (\pi/6)/(\pi/4) = 2/3$.

SVAR: MASSCENTRUM ÄR $(x_c, y_c, z_c) = (0, 0, 2/3)$

SAMMANFATTNING – LEKTION 12

BEGREPP:
- TRÖGHETSMOMENT (s.311)
- MASSCENTRUM (s.313)