KTH Matematik

KTHs Matematiska Cirkel

Träning i bevisföring

Andreas Enblom

Institutionen för matematik, 2005
Finansierat av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse

1 Mängdlära

Här kommer fyra tips på hur man visar saker om mängder:

1. Visa att $x \in A$.

   Här ska man alltså visa att x uppfyller de villkor som definierar vilka element som tillhör mängd A. Om exempelvis $A = \{1, 2, 3\}$ är det uppenbart att $2 \in A$, men om $A = \{x : \text{villkor på } x\}$ så måste man visa att x uppfyller de nämnda villkoren. Om $A = B \cap C$ så måste man visa att $x \in B$ och $x \in C$, medan om $A = B \cup C$ så räcker det att visa att $x \in B$ eller $x \in C$ (eller båda).

2. Visa att $A \subseteq B$.

   Tag ett godtyckligt element $x \in A$. Använd nu definitionen för mängden A för att skriva ner vilka villkor som finns på x. Visa sedan att $x \in B$. Eftersom x var godtyckligt så betyder detta att alla $x \in A$ uppfyller $x \in B$, det vill säga $A \subseteq B$.

3. Visa att $A = B$.

   Vi visar först $A \subseteq B$ och sedan $B \subseteq A$. Då har vi visat att alla element i A ligger i B och att alla element i B ligger i A. Det följer då naturligtvis att $A = B$.

4. Visa att $A = \emptyset$.

   Minns att $\emptyset$ betecknar denna tomma mängden, det vill säga en mängd som inte innehåller några element alls. Det som ska visas är alltså att det inte kan finnas några element i A.

   Antag till att börja med att $x \in A$. Använd definitionen av A för att skriva ner vilka villkor som då ställs på x. Visa att dessa villkor är omöjliga (att de leder till en motsägelse). Alltså kan det inte vara så att $x \in A$, oavsett vilket x vi väljer. Alltså innehåller inte A några element.

Låt Ω vara en godtycklig mängd. Vi kommer att antaga att alla mängder $A, B, C, \ldots$ är delmängder till Ω. Låt oss göra följande definitioner:

1. $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
2. $A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$
3. $A \Delta B = \{x \in \Omega : x \text{ tillhör en av } A \text{ och } B \text{ men inte båda}\}$

Övning 1.1. Visa att $A \setminus B \subseteq A \Delta B$.

Övning 1.2. Visa att $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Övning 1.3. Två mängder B och C sägs vara *disjunkta* om de inte har några gemensamma element. Visa att B och C är disjunkta om och endast om $B \cap C = \emptyset$.

Övning 1.4. Visa att A och A^c är disjunkta.

Övning 1.5. Visa att $\Omega = A \cup A^c$.

Övning 1.6. Symbolen $n!$ definieras som $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ och kallas n-fakultet. Exempelvis har vi att $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ och $5! = 120$. Låt $A_n = \{kn : k = 1, 2, 3, \ldots\}$. Visa att $n! \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, för varje heltal $n \geqslant 1$, men att $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \emptyset$.

Övning 1.7. Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ och $B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att $\mathbb{N} \setminus \{0\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots$.

Övning 1.8. Visa att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

2 Ekvivalensrelationer och implikation

Låt A vara en mängd. Vi minns följande definitioner: En *relation* R på A är en mängd som består av ordnade par (x, y) där $x, y \in A$. Om $(x, y) \in R$ så skriver vi xRy. En *ekvivalensrelation* är en relation R som uppfyller:

1. (Reflexivitet) För alla $x \in A$ gäller xRx.
2. (Symmetri) För alla $x, y \in A$ gäller att om xRy så gäller även yRx.
3. (Transitivitet) För alla $x, y, z \in A$: Om xRy och yRz så xRz.

En sak som kan vara bevistekniskt svårt är att använda en *implikation*, det vill säga ett påstående som "om P så Q". Här är P och Q några påståenden som kan vara sanna eller falska, exempelvis "månen är en ost", "det regnar" eller "xRy gäller". En vanlig beteckning för "om P så Q" är P $\Longrightarrow$ Q.

I detta sammanhang dyker implikationer upp när man visar symmetri och transitivitet hos ekvivalensrelationer. Det som ska visas är alltså exempelvis att "om xRy så yRx", för godtyckliga x och y. För att visa en implikation "om P så Q" så antar man att P är sant och visar utifrån detta antagande att Q är sant. Då har man visat att så fort P är sant så är även Q sant. Men däremot har man inte visat det omvända. Det behöver inte vara så att så fort Q är sant så måste P vara sant. Att P $\Longrightarrow$ Q är *inte* samma sak som att Q $\Longrightarrow$ P.

Om både P $\Longrightarrow$ Q och Q $\Longrightarrow$ P gäller så säger vi att P och Q är *ekvivalenta*, eller att "P om och endast om Q". Detta betecknas P $\Longleftrightarrow$ Q.

Låt oss ta ett konkret exempel. Betrakta påståendet "om bilen startar så finns det bensin i tanken", som ju är sant (om vi antar att det är en bensindriven bil vi talar om). Detta är av typen "om P så Q". Till att börja med så är det inte sant att "om det finns bensin i tanken så startar bilen". Alltså är inte "om P så Q" samma sak som "om Q så P". Vidare är påståendet "om bilen startar så finns det bensin i tanken" sant oavsett om bilen startar eller inte. Alltså kan påståendet "om P så Q" vara sant även om P är falskt.

För att visa "om P så Q" finns det två huvudsakliga sätt, där det första är det vanligaste.

1. Antag att P är sant. Använd detta antagande för att visa att Q är sant.
2. Antag att Q är falskt. Använd detta antagande för att visa att P är falskt.

Det är viktigt att poängtera att dessa är hypotetiska antaganden och resonemang. Det enda som visas i exempelvis punkt 2 är att under antagandet att Q är falskt följer det att P är falskt. Det betyder inte att P måste vara falskt! Det betyder bara att P måste vara falskt så fort Q är falskt.

Till sist, när man säger "för alla $x, y \in A$" så betyder det inte att x och y måste vara olika. För det mesta är de det, men vi ska betrakta *alla* möjligheter att välja $x \in A$ och att välja $y \in A$ och några av dessa möjligheter är att x och y är samma element.

Övning 2.1. Låt K vara en kropp (se Definition 3.2.1 i kompendiet). Låt $x, y, z \in K$. Visa följande:

1. Om $x + y = y$ så $x = 0$.
2. Om $z \neq 0$ och $x \cdot z = y \cdot z$ så $x = y$.
3. Om $y \neq 0$ och $x \cdot y = y$ så $x = 1$.
4. Om $x + y = 0$ så gäller $y = -x$.

Anmärkning: Kom ihåg att K är en godtycklig mängd med några (abstrakta) operationer $+$ och $\cdot$ och inte nödvändigtvis innehåller tal, så använd inte vanliga räkneregler för tal, utan bara definitionen av kropp.

Övning 2.2. Låt $A = \{4, 7\}$ och $R = \{(4, 4), (7, 7)\}$. Visa att R är en ekvivalensrelation.

Övning 2.3. Låt A vara en godtycklig icke-tom mängd. Visa att $=$ är en ekvivalensrelation på A. Observera att föregående uppgift är ett specialfall av detta.

Övning 2.4. Låt $B = \{1, 2, 3\}$ och $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Visa att S är en ekvivalensrelation.

Övning 2.5. Betrakta mängden $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ och låt $n \in \mathbb{Z}$ vara konstant. Låt för $x, y \in \mathbb{Z}$ relationen $x \equiv y \pmod{n}$ betyda att det finns ett heltal k sådant att $x = y + kn$. Visa att denna relation är en ekvivalensrelation. *Ledning:* Här betraktar vi alltså en relation R där xRy betyder att $x \equiv y \pmod{n}$. Se också Exempel 1.3.7 i kompendiet.

Övning 2.6. Låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vara disjunkta mängder (se Övning 1.3) och

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Låt xRy betyda att det finns ett heltal k med $1 \leqslant k \leqslant n$ sådant att $x \in A_k$ och $y \in A_k$. Visa att R är en ekvivalensrelation på mängden A. (Vad är är ekvivalensklasserna till R?)

Övning 2.7. Låt $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ för $i = 1, 2, \ldots$ och $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$. Låt xRy betyda att det finns ett heltal $k \geqslant 1$ sådant att $x \in A_k$ och $y \in A_k$. Visa att R är en ekvivalensrelation på mängden A.

Övning 2.8. Låt $A_i = \{i, i + 1\}$ för $i = 1, 2, \ldots, n$ och $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, där $n \geqslant 2$. Låt xRy betyda att det finns ett heltal k med $1 \leqslant k \leqslant n$ sådant att $x \in A_k$ och $y \in A_k$. Visa att R *inte* är en ekvivalensrelation. Jämför med föregående två uppgifter.

3 Lösningar

Övning 1.1. Tag $x \in A \setminus B$. Det betyder att $x \in A$ och att $x \notin B$. Alltså tillhör x en av A och B, men inte båda, och därmed gäller $x \in A\Delta B$. Eftersom x var godtycklig betyder detta att $x \in A\Delta B$ för alla $x \in A \setminus B$, det vill säga att $A \setminus B \subseteq A\Delta B$.

Övning 1.2. Tag $x \in A\Delta B$. Det betyder att x tillhör en av A och B men inte båda. Vi har två fall:

Till att börja med kan $x \in A$ och $x \notin B$. Då gäller per definition $x \in A \setminus B$. Eftersom $A \setminus B$ är en delmängd till $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ så gäller även $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Det andra fallet är att $x \in B$ och $x \notin A$, det vill säga att $x \in B \setminus A \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

I båda fallen får vi alltså att $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, och eftersom x var godtycklig så betyder detta att $A\Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Omvänt, tag $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Det betyder att $x \in A \setminus B$ eller $x \in B \setminus A$. I båda fallen tillhör x en av A och B men inte båda. Alltså gäller $x \in A\Delta B$. Eftersom x var godtycklig så följer det att $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A\Delta B$.

Nu har vi visat att $A\Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ och att $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A\Delta B$. Det betyder att $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Övning 1.3. Antag att B och C är disjunkta. Antag att $x \in B \cap C$, det vill säga att $x \in B$ och $x \in C$. Men detta betyder att B och C har x som gemensamt element, vilket motsäger att B och C är disjunkta. Alltså måste $B \cap C = \emptyset$.

Omvänt, antag att $B \cap C = \emptyset$. Det betyder att det inte finns något element som tillhör både B och C. Alltså har B och C inga gemensamma element, det vill säga att B och C är disjunkta.

Nu har vi alltså visat två saker, dels att om B och C är disjunkta så gäller $B \cap C = \emptyset$, dels att om $B \cap C = \emptyset$ så är B och C disjunkta. Tillsammans betyder detta att B och C är disjunkta om och endast om $B \cap C = \emptyset$.

Övning 1.4. Enligt föregående uppgift är det vi ska visa att $A \cap A^c = \emptyset$. Antag att $x \in A \cap A^c$. Det betyder att $x \in A$ och att $x \in A^c$. Det senare betyder per definition att $x \notin A$, vilket är en motsägelse. Alltså måste $A \cap A^c = \emptyset$.

Övning 1.5. Tag $x \in \Omega$. Vi har två fall: $x \in A$ och $x \notin A$. I det först fallet gäller naturligtvis $x \in A \cup A^c$. I det andra fallet har vi per definition att $x \in A^c$, och därmed att $x \in A \cup A^c$. I båda fallen gäller alltså $x \in A \cup A^c$ och eftersom x var godtycklig så följer $\Omega \subseteq A \cup A^c$.

Omvänt, antag att $x \in A \cup A^c$. Vi vet att $A \subseteq \Omega$ och att $A^c \subseteq \Omega$. Alltså måste $x \in \Omega$. Detta visar att $A \cup A^c \subseteq \Omega$, och tillsammans med ovanstående får vi $\Omega = A \cup A^c$.

Övning 1.6. Låt n vara ett heltal med $n \geqslant 1$. Tag ett heltal i med $1 \leqslant i \leqslant n$. Notera att $n! = ki$ där $k = 1 \cdot 2 \cdots (i-2) \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot (i+1) \cdots (n-1) \cdot n \geqslant 1$. Alltså gäller $n! \in A_i$, och eftersom i var godyckligt så gäller $n! \in A_i$ för alla $i = 1, 2, \ldots, n$, det vill säga $n! \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Nu, eftersom n var godtyckligt så gäller $n! \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$, för alla heltal $n \geqslant 1$.

Vidare, antag att $x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots$. Det betyder att $x \in A_n$ för alla heltal $n \geqslant 1$. I synnerhet gäller $x \in A_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, det vill säga x är ett positivt heltal. Låt $m = x + 1$. Då gäller $x < m < 2m < 3m < \cdots$, och i synnerhet $x \neq km$ för $k = 1, 2, \ldots$, så $x \notin A_m$. Men detta motsäger ju att $x \in A_n$ för alla heltal $n \geqslant 1$. Alltså gäller $A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \emptyset$.

Övning 1.7. Tag $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Det betyder att $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ och att $x \notin \{0\}$, det vill säga att x är något av talen $1, 2, 3, \ldots$. I synnerhet gäller $x \in \{1, 2, \ldots, x\} = B_x$ och därmed $x \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots$. Eftersom x var godtycklig visar detta att $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \cdots$.

Omvänt, antag att $x \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots$. Det betyder att det finns ett heltal $n \geqslant 1$ så att $x \in B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. I synnerhet gäller $x \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ och $x \notin \{0\}$, det vill säga $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Detta visar att $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Övning 1.8. Tag $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$. Det betyder att $x \in \Omega$ och $x \notin (A \cap C) \cup (B \cap C^c)$. Alltså har vi att $x \notin A \cap C$ och $x \notin B \cap C^c$. Det finns nu två möjligheter: $x \in C$ och $x \notin C$.

I det första fallet, det vill säga $x \in C$, måste $x \notin A$ eftersom om $x \in A$ så skulle $x \in A \cap C$ vilket är falskt. Alltså gäller $x \in A^c$, vilket tillsammans med $x \in C$ ger att $x \in A^c \cap C$ i detta fall. I synnerhet har vi att $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

I det andra fallet gäller $x \in C^c$ och då måste $x \in B^c$ eftersom om $x \in B$ så skulle $x \in B \cap C^c$ vilket är falskt. Alltså gäller $x \in B^c \cap C^c$, och i synnerhet $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

I båda fallen gäller alltså $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$, och eftersom x var godtycklig så visar detta att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c \subseteq (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

Omvänt, tag $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$. Då gäller $x \in A^c \cap C$ eller $x \in B^c \cap C^c$ (eller båda). Vi har alltså dessa två fall.

I det första fallet, det vill säga $x \in A^c \cap C$, har vi att $x \notin A$ och $x \notin C^c$. I synnerhet har vi att $x \notin A \cap C$ (eftersom $x \notin A$) och att $x \notin B \cap C^c$ (eftersom $x \notin C^c$). Alltså tillhör x varken $A \cap C$ eller $B \cap C^c$, vilket betyder att $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$.

I det andra fallet, det vill säga $x \in B^c \cap C^c$ har vi att $x \notin B$ och att $x \notin C$. Det följer att $x \notin A \cap C$ och att $x \notin B \cap C^c$. Alltså gäller $x \notin (A \cap C) \cup (B \cap C^c)$, vilket betyder att $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$.

I båda fallen har det alltså visats att $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$, och eftersom x var godtycklig visar detta att $(A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c) \subseteq ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$.

Vi har alltså visat att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c \subseteq (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$ och att $(A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c) \subseteq ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$ och därmed att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

Övning 2.1.

1. Antag att $x + y = y$. Det finns ett element $-y$ sådant att $y + (-y) = 0$. Addera elementet $-y$ till båda sidor av $x + y = y$ och få $x + y + (-y) = y + (-y)$. Eftersom $y + (-y) = 0$ så får vi $x + 0 = 0$, och eftersom $x + 0 = x$ så ger detta att $x = 0$.

2. Antag att $z \neq 0$ och att $x \cdot z = y \cdot z$. Eftersom $z \neq 0$, så finns ett element z^{-1} sådant att $z \cdot z^{-1} = 1$. Vi kan multiplicera båda sidor av identiteten $x \cdot z = y \cdot z$ med z^{-1} och få $x \cdot z \cdot z^{-1} = y \cdot z \cdot z^{-1}$, det vill säga $x \cdot 1 = y \cdot 1$, och därmed följer $x = y$.

3. Antag att $y \neq 0$ och att $x \cdot y = y$. Då finns ett element y^{-1} sådant att $y \cdot y^{-1} = 1$. Nu följer $x = x \cdot 1 = x \cdot y \cdot y^{-1} = y \cdot y^{-1} = 1$.

4. Antag att $x + y = 0$. Då gäller $y = y + 0 = y + x + (-x) = 0 + (-x) = -x$.

Övning 2.2. Vi har att $4R4$ och $7R7$, det vill säga xRx för alla $x \in A$. Alltså är R reflexiv.

Vidare, tag $x, y \in A$ och antag att xRy. Vi har då endast två möjligheter: $x = y = 4$ och $x = y = 7$ eftersom det endast är för dessa kombinationer som xRy gäller. I båda fallen gäller även yRx. För alla $x, y \in A$ gäller alltså att om xRy så yRx, det vill säga R är symmetrisk.

Till sist, tag x, y, z som uppfyller att xRy och yRz gäller. Återigen har vi bara två möjligheter för vilka xRy och yRz gäller: $x = y = z = 4$ och $x = y = z = 7$. I båda fallen gäller även xRz. Alltså är R transitiv.

Övning 2.3. Att $=$ är reflexiv är klart eftersom $x = x$ för alla $x \in A$. Vidare, tag godtyckliga $x, y \in A$ och antag att $x = y$. Då gäller naturligtvis även $y = x$. Eftersom x och y var godtyckliga visar detta att för alla $x, y \in A$ har vi att om $x = y$ så gäller $y = x$. Detta betyder att $=$ är symmetrisk. Till sist, tag $x, y, z \in A$ som uppfyller $x = y$ och $y = z$, det vill säga att x är samma element som y som är samma element som z. Då har vi att x är samma element som z, det vill säga $x = z$, vilket visar att $=$ är transitiv. Alltså är $=$ en ekvivalensrelation.

Övning 2.4. Notera att $1S1$, $2S2$ och $3S3$ alla gäller, det vill säga xSx gäller för alla $x \in S$. Detta betyder att S är reflexiv. Tag $x, y \in B$. Följande fall finns:

x	y	xSy	ySx
1	1	sant	sant
1	2	sant	sant
1	3	falskt	falskt
2	1	sant	sant
2	2	sant	sant
2	3	falskt	falskt
3	1	falskt	falskt
3	2	falskt	falskt
3	3	sant	sant

Vi ser att i alla fall där xSy är sant är även ySx sant. Alltså är S reflexiv.

Slutligen, tag $x, y, z \in B$ sådana att xSy och ySz. Vi delar in dessa möjligheter i tre fall: $x = 1$, $x = 2$ och $x = 3$.

I fallet $x = 1$ finns följande möjligheter för att xSy och ySz ska kunna gälla: $\{y = 1, z = 1\}$, $\{y = 1, z = 2\}$, $\{y = 2, z = 1\}$ och $\{y = 2, z = 2\}$. I alla fyra delfall gäller xSz.

I nästa fall, där $x = 2$ finns möjligheterna $\{y = 1, z = 1\}$, $\{y = 1, z = 2\}$ $\{y = 2, z = 1\}$ och $\{y = 2, z = 2\}$. För alla fyra möjligheterna gäller xSz.

Det sista fallet är $x = 3$. Här finns bara en möjlighet, nämligen att $y = z = 3$. I detta enda fall gäller xSz.

Nu har det alltså visats att för alla $x, y, z \in B$ sådana att xSy och ySz gäller, har vi även att xSz gäller. Alltså är S transitiv.

Övning 2.5. Tag $x \in \mathbb{Z}$. Då gäller $x = x + 0 \cdot n$, det vill säga $x \equiv x \pmod{n}$. Eftersom x var godtycklig visar detta att för alla $x \in \mathbb{Z}$ gäller $x \equiv x \pmod{n}$. Alltså är relationen reflexiv.

Tag godtyckliga $x, y \in \mathbb{Z}$. Antag att $x \equiv y \pmod{n}$. Det betyder per definition att det finns ett heltal k sådant att $x = y + kn$. Nu gäller $y = x + (-k) \cdot n$, det vill säga $y \equiv x \pmod{n}$. Detta visar symmetrin.

Till sist, tag $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Antag att $x \equiv y \pmod{n}$ och $y \equiv z \pmod{n}$. Alltså antar vi att det finns heltal k_1 och k_2 sådana att $x = y + k_1 n$ och $y = z + k_2 n$. Nu gäller $x = z + (k_1 + k_2)n$, det vill säga $x \equiv z \pmod{n}$. Alltså är relationen transitiv.

Övning 2.6. Tag $x \in A$. Eftersom $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ så måste det finnas ett heltal k med $1 \leqslant k \leqslant n$ sådant att $x \in A_k$. Eftersom x var godtycklig så betyder detta att xRx för alla $x \in A$, det vill säga att R är reflexiv.

Tag $x, y \in A$ och antag att xRy. Då finns ett heltal k med $1 \leqslant k \leqslant n$ sådant att $x \in A_k$ och $y \in A_k$. Givetvis gäller då också yRx. Alltså är R symmetrisk.

Till sist, tag $x, y, z \in A$ och antag att xRy och yRz. Det betyder att det finns två heltal k_1 och k_2, med $1 \leqslant k_1 \leqslant n$ och $1 \leqslant k_2 \leqslant n$ sådana att $x, y \in A_{k_1}$ och $y, z \in A_{k_2}$. Det vill visa nu är att $z \in A_{k_1}$. Antag att $z \notin A_{k_1}$. Då måste A_{k_1} och A_{k_2} vara olika mängder och därmed disjunkta, men att $y \in A_{k_1} \cap A_{k_2}$ motsäger att de är disjunkta och alltså måste $z \in A_{k_1}$. Alltså gäller $x, z \in A_{k_1}$, det vill säga xRz, och eftersom x, y, z var godtyckliga så visar detta att R är transitiv.

(Ekvivalensklasserna till R är naturligtvis mängderna $A_1, A_2, \ldots, A_n$.)

Övning 2.7. Börja med att notera att $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tag $x, y \in A$. Låt m vara det största av talen x och y. Givetvis gäller då $x \in A_m$ och $y \in A_m$, det vill säga xRy. Eftersom x, y var godtyckliga visar detta att xRy för alla $x, y \in A$. Det är alltså en relation där alla element är relaterade till varandra (och till sig själva). Detta får till följd att R måste vara en ekvivalensrelation.

Om man vill visa att de tre villkoren är uppfyllda kan det se ut på följande sätt. Eftersom xRy för alla $x, y \in A$ så gäller i synnerhet xRx för alla $x \in A$, det vill säga R är reflexiv. Vidare, tag $x, y \in A$ och antag att xRy. Eftersom alla element är relaterade till varanda så gäller yRx, och R är symmetrisk. Till sist, tag $x, y, z \in A$ och antag att xRy och yRz. Eftersom xRz alltid gäller så får vi att R är transitiv.

Övning 2.8. Notera att $1R2$ eftersom $1, 2 \in A_1$. Vidare har vi att $2R3$ eftersom $2, 3 \in A_2$, men däremot ligger inte både 1 och 3 båda samtidigt i någon av mängderna $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Det betyder att $1R3$ inte gäller. Alltså är R inte transitiv.