KTH Matematik

KTHs Matematiska Cirkel

Sannolikhetsteori

Joakim Arnlind

Andreas Enblom

Institutionen för matematik, 2007

Finansierat av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse

Innehåll

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som litteratur till KTHs Matematiska Cirkel under läsåret 2007–2008 och består av sju avsnitt. Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju träffarna.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Övningsuppgifterna är fördelade i två kategorier. De med udda nummer har facit, och syftet med dessa är att eleverna ska kunna räkna dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. De med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa även dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av oss.

Vi bör också nämna att få av uppgifterna är helt enkla. Kika därför inte i facit efter några få minuter (om du inte löst uppgiften), utan prata först med kompisar eller försök litet till. Alla uppgifter ska gå att lösa med hjälp av informationen i detta kompendium.

KTHs Matematiska Cirkel finansieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Vi tackar Dan Laksov och Roy Skjelnes, båda från Institutionen för Matematik vid KTH, för deras givande kommentarer om denna skrift.

Några ord om Cirkeln

KTHs Matematiska Cirkel, i dagligt tal benämnd Cirkeln, startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga studier. Lärarna på cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, liksom övriga uppgifter om KTHs Matematiska Cirkel, finns tillgängligt på

`http://www.math.kth.se/cirkel`

Sedan 2001 godkänns Cirkeln av Stockholms Stad som en 50-poängskurs eller som matematisk breddning. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning. Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever och lärare.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om KTHs Matematiska Cirkel och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygsättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

Godkänd: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Väl godkänd: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Mycket väl godkänd: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Det är också möjligt att skolorna samarbetar, så elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, september 2007

1 Mängdlära

1.1 Mängder

Låt oss börja med att titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En mängd är en samling matematiska objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för *element* i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Ett sådant exempel är

$$A = \{1, 3, a, 7\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a$ och 7. Ett annat sätt att beskriva en mängd är att skriva $\{x \in D : \text{villkor på } x\}$. Med detta menar man mängden av alla element i D som uppfyller de givna villkoren. Som exempel tar vi

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} : n \text{ är udda}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} : y > 2\}.$$

Mängden B innehåller alla udda positiva heltal, medan C innehåller alla element från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ som är större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x *tillhör* A. Exempelvis gäller $17 \in \{n : n \text{ är ett udda heltal}\}$ och $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett element x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den *tomma mängden* innehåller ingenting och betecknas $\varnothing$.

Exempel 1.1.1. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A : x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A : x < 3\} = \varnothing$. Vidare har vi att $4 \in A$ men $4 \notin B$. ▲

Definition 1.1.2. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en *delmängd* till B. Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.1.3. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. ▲

Definition 1.1.4. Antag att A och B är mängder. *Unionen* av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. *Snittet* av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.1.5. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $B = \{5, 8, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$. ▲

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de *naturliga talen* $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Denna mängd betecknas $\mathbb{N}$. Tar vi med negativa tal får vi heltalen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Beteckningen kommer från tyskans *zahl* som betyder tal. Slutligen betecknar vi med $\mathbb{R}$ de *reella talen*, det vill säga alla tal på tallinjen, exempelvis $0, -1, 3/2, -527/3, \sqrt{2}$ och π. Notera att $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Exempel 1.1.6. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 0\}$. ▲

Exempel 1.1.7. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} : n = 2 \cdot k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. ▲

Exempel 1.1.8. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis så kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A. ▲

1.2 Funktioner

Innan vi gör en ordentlig definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$. Detta är ett exempel på en funktion. Formeln säger att om vi tar ett tal $x \in \mathbb{R}$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de reella talen till de reella talen, eftersom både det vi stoppar in, x, och det vi får ut, $f(x)$, är reella tal. Vi brukar beteckna detta med $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition 1.2.1. Låt X och Y vara mängder. En *funktion* $f : X \to Y$ är ett sätt att till varje element $a \in X$ tilldela ett välbestämt element $b \in Y$. Vi skriver $f(a) = b$. Vi säger att a *avbildas* på b och att b är *bilden* av a.

Anmärkning 1.2.2. Ofta säger man att f är en funktion från X till Y istället för att använda beteckningen $f : X \to Y$. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är *avbildning*.

Exempel 1.2.3. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{2, 4, 6\}$. Ett exempel på funktion $f : A \to B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$.

Här definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från en *ändlig* mängd A kan man till exempel definera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

Till sist, om det vore så att $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ så skulle f ge en funktion $A \to B$, eftersom elementen $f(1), f(2)$ och $f(3)$ alla tillhör B. ▲

Exempel 1.2.4. Låt $C = \{1, 3, b, \{a, 7, 13\}\}$ och $D = \{a, \{1, 3\}, 2\}$. Dessa mängder innehåller alltså både tal, bokstäver och mängder. Ett exempel på en avbildning $g : C \to D$ ges av

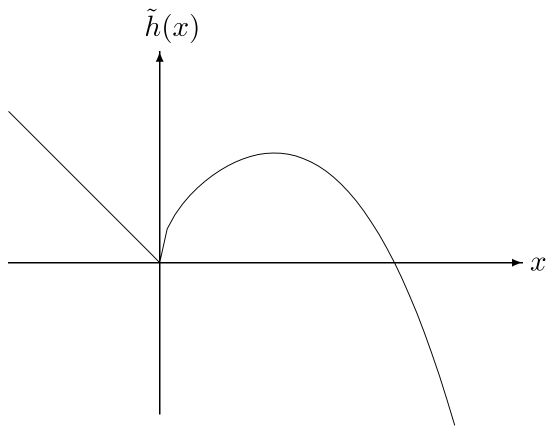
x	$g(x)$
1	$\{1, 3\}$
3	a
b	2
$\{a, 7, 13\}$	$\{1, 3\}$

Exempelvis har vi alltså att $g(b) = 2$ och $g(\{a, 7, 13\}) = \{1, 3\}$. ▲

Exempel 1.2.5. Låt $h(x) = \sqrt{x} - x^3/3$. Då är h en funktion från mängden $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ till $\mathbb{R}$. Vi kan inte låta $x < 0$ eftersom $\sqrt{x}$ inte är väldefinerat i detta fall. Däremot skulle vi kunna definiera en funktion $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom att låta

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{x^3}{3} & \text{om } x \geqslant 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

d.v.s. $\tilde{h}(x) = -x$ för negativa x och $\tilde{h}(x) = \sqrt{x} - x^3/3$ då $x \geqslant 0$. Eftersom detta är en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så kan vi symbolisera funktionen med grafen:



▲

1.3 Uppräkneliga mängder

Låt X vara en mängd. Om det finns ett heltal n sådant att X innehåller exakt n element, så sägs X vara *ändlig*. I annat fall sägs mängden vara *oändlig*. Om X är en ändlig mängd så betecknar vi med $|X|$ antalet element i X. En ändlig mängd innehåller alltså ett ändligt antal element. Storleken på ändliga mängder kan vi lätt jämföra genom att jämföra antalet element.

Kan vi göra motsvarande jämförelse för oändliga mängder? Finns det oändliga mängder som i någon mening är olika stora? Det finns en hel teori som behandlar storleken av oändliga mängder, men vi ska nöja oss med att definiera de uppräkneliga och överuppräkneliga mängderna.

Definition 1.3.1. En mängd X sägs vara *uppräknelig* om man till varje tal $n \in \mathbb{N}$ kan ordna ett element $x_n \in X$ så att $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Om X inte är uppräknelig sägs X vara *överuppräknelig*.

Exempel 1.3.2. Givetvis är $\mathbb{N}$ uppräknelig. Låt $x_n = n$ och få $\{x_0, x_1, \ldots\} = \{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N}$. För att visa att även $\mathbb{Z}$ är uppräknelig, tag $n \in \mathbb{N}$ och låt

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0 \\ (n+1)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \\ -n/2 & \text{om } n \text{ är jämn.} \end{cases}$$

Därmed gäller $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2, x_5 = 3, x_6 = -3$ o.s.v. så $\mathbb{Z} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. ▲

Exempel 1.3.3. Låt A vara en ändlig mängd med $n+1$ element; vi kan skriva mängden som $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Låt $x_i = a_i$ för $i = 0, 1, \ldots, n$ och $x_i = a_n$ för $i > n$. Detta ger oss att

$$A = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_n, a_n, \ldots\}$$

eftersom det inte spelar någon roll hur många gånger vi räknar upp samma element. Alltså är alla ändliga mängder uppräkneliga. ▲

Två oändliga mängder som är uppräkneliga betraktar vi som lika stora. I denna mening är de naturliga talen lika många som heltalen, trots att de naturliga talen är en delmängd till heltalen. Man kan visa att de reella talen inte är uppräkneliga - de utgör med andra ord en överuppräknelig mängd. Alltså är de reella talen väsentligen fler än heltalen.

Övningar

I Appendix A finns det fler övningar som handlar om mängdlära.

Övning 1.1. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ och $D = \{1, 4, 19, 36, 101\}$. Bestäm mängderna

1. $B \cup C$,
2. $B \cap C$,
3. $D \cap C$,
4. $\{x \in D \,:\, x \in B\}$,
5. $\{x \in A \,:\, x = y + 1 \text{ för något } y \in D\}$,
6. $\{x + 1 \,:\, x \in D\}$.

Övning 1.2. Definiera funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom $f(x) = 2x$. Visa att det finns en funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att $g\big(f(x)\big) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Vi kallar g för *den inversa funktionen till* f.

Övning 1.3. Låt $X = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ vara mängden av alla udda positiva heltal. Visa att X är uppräknelig.

Övning 1.4. Låt X vara en uppräknelig mängd och låt Y vara en delmängd till X. Visa att Y är uppräknelig.

2 Sannolikhetsrum

2.1 Utfall och händelser

Sannolikhetsteori handlar om att skapa en teoretisk modell för slump och sannolikhet. Något av det mest grundläggande i teorin är slumpmässiga *händelser*. Händelser består av slumpmässiga *utfall* som är sannolikhetsteorins minsta byggstenar. Dessa begrepp kommer att definieras på ett noggrant sätt om en stund, men låt oss först illustrera dem med några exempel:

Exempel 2.1.1. Säg att vi har en röd, en gul och en blå tärning. När vi kastar dem får vi ett slumpmässigt utfall. Ett utfall kan alltså se ut så här:

Röd tärning: 2
Gul tärning: 6
Blå tärning: 1

En händelse är något som:

Händelse 1: Summan av vad tärningarna visar är jämn.
Händelse 2: Den gula tärningen visar siffran 3.
Händelse 3: Summan av vad den röda och gula tärningen visar är mindre än vad den blå tärningen visar.

Utfallen säger exakt vad de olika tärningarna visar, medan en händelse kan inträffa för flera olika utfall. Så snart vi kastat tärningarna, det vill säga fått ett utfall, vet vi om en händelse inträffat eller inte. Betrakta följande utfall:

Utfall A	**Utfall B**	**Utfall C**
Röd tärning: 1	Röd tärning: 3	Röd tärning: 4
Gul tärning: 2	Gul tärning: 3	Gul tärning: 3
Blå tärning: 5	Blå tärning: 5	Blå tärning: 5

Både utfall A och C ingår i händelse 1, medan det bara är ett av de tre utfallen ovan, nämlingen utfall A, som ingår i händelse 3. Givetvis finns det andra utfall än dessa tre, och i själva verket täcker de tre händelserna in ett antal utfall förutom de tre ovanstående. Exempelvis ingår även utfallet

Röd tärning: 2
Gul tärning: 3
Blå tärning: 6

i händelse 3. ▲

Exempel 2.1.2. Pokervarianten Texas Hold'em inleds med att varje spelare får två kort var. Om vi antar att det är fyra spelare så är följande ett exempel på utfall av denna slumpmässiga utdelning av kort:

Spelare 1:	♠2	♡K
Spelare 2:	♢10	♢E
Spelare 3:	♡Kn	♣7
Spelare 4:	♠8	♣4

En händelse är ett påstående om hur korten blivit utdelade, och så snart vi fått ett utfall vet vi om händelserna är uppfyllda eller ej. Exempel på händelser är:

Händelse 1: Någon spelare har två ruter.
Händelse 2: Spelare 3 har två spader.
Händelse 3: Alla kungar är utdelade.
Händelse 4: Spelare 3 eller 4 har klöver åtta.
Händelse 5: Spelare 4 har två ess.

Riktigt intressant kan det förstås inte bli förrän vi kan bestämma sannolikheten för dessa händelser, och det är dit vi kommer i nästa avsnitt. ▲

Efter dessa exempel har det blivit dags att göra en matematisk definition av utfall och händelser. Med hjälp av mängdläran som introducerades i Kapitel 1 blir detta en lätt match.

Definition 2.1.3. Ett *utfallsrum* är en uppräknelig icke-tom mängd. Elementen i utfallsrummet kallas *utfall*. En *händelse* är en delmängd till utfallsrummet, det vill säga en mängd av utfall.

Frågan är nu hur man kan formulera vardagliga exempel på utfall och händelser i den mängdteoretiska definitionen ovan. Här kommer ett par exempel på det:

Exempel 2.1.4. Betrakta mängden

$$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Eftersom Ω är en uppräknelig mängd så är den ett utfallsrum. Elementen $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ är våra utfall och händelser är exempelvis

$$A = \{011, 101, 110\} \quad \text{och} \quad B = \{111\}.$$

Ett exempel som detta verkar vid första anblicken inte ha något med verklighetens slumpmässiga händelser att göra, men i detta fall finns det ett sätt att tolka utfallsrummet och händelserna som något ur verkligheten.

Antag att vi singlar slant tre gånger. Detta ger oss ett slumpmässigt utfall som motsvarar något av elementen i Ω. Exempelvis kan vi tänka på utfallet 011 som att vi första gången fick klave, andra gången krona, och tredje gången krona.

På detta sätt kan vi även tolka in en innebörd i händelserna A och B. Händelsen A motsvarar att få krona exakt två gånger, och händelsen B motsvarar att få krona på alla tre slantsinglingarna. Notera att det är skillnad på *utfallet* 111 och *händelsen* $\{111\}$, även om den senare händelsen bara innehåller ett enda utfall. ▲

Exempel 2.1.5. Låt oss återgå till tärningarna i Exempel 2.1.1. Följande är ett sätt att definiera ett utfallsrum som motsvarar denna situation. Betrakta följande matematiska objekt:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (1,1,1)\\ \omega_2 &= (1,1,2)\\ \omega_3 &= (1,1,3)\\ &\vdots\\ \omega_{216} &= (6,6,6).\end{aligned}$$

Vi ser det exempelvis som att objektet ω_3 motsvarar utfallet

Röd tärning: 1
Gul tärning: 1
Blå tärning: 3.

Att det finns just 216 olika tärningskast med tre tärningar beror på att varje tärning kan landa på 6 olika sätt och det totala antalet blir då $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Hela listan med utfall finns i Appendix B.

Vi låter nu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{216}\}$ vara vårt utfallsrum. Elementen i mängden Ω, det vill säga $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_{216}$, kallas utfall. Händelser är alltså mängder som består av ett antal av utfallen ω_n. Exempelvis är

$$A = \{\omega_1, \omega_{44}, \omega_{87}, \omega_{130}, \omega_{173}, \omega_{216}\}$$

en händelse, nämligen den slumpmässiga händelsen att alla tre tärningar visar samma siffra, eftersom $\omega_1 = (1,1,1)$, $\omega_{44} = (2,2,2)$, $\omega_{87} = (3,3,3)$, $\omega_{130} = (4,4,4)$, $\omega_{173} = (5,5,5)$ och $\omega_{216} = (6,6,6)$ (se Appendix B). ▲

2.2 Sannolikhet

Alla har nog en intuitiv uppfattning av vad sannolikhet är. Men vi nöjer oss inte med detta, utan vill göra en ordentlig, matematisk definition av sannolikhetsbegreppet. Frågan är *vad* man kan bestämma sannolikheten för.

Genom att formulera några vardagliga meningar som innehåller ordet sannolikhet kan vi besvara denna fråga. ”Vad är sannolikheten för att summan av tre tärningskast är jämn?” ”Vad är sannolikheten för att få Royal Straight Flush i poker?” Båda dessa frågor har formen ”Vad är sannolikheten för *en händelse*?”, och alltså är det för *händelser* man bestämmer sannolikheten. Sannolikheten för en händelse låter vi vara ett tal mellan 0 och 1.

Innan vi kommer till själva definitionen behöver vi införa ett nytt begrepp. Inför följande definition, kan det vara bra att minnas att en mängd inte bara behöver innehålla saker som tal, utan även kan innehålla andra mängder.

Definition 2.2.1. Låt X vara en mängd. Då är *potensmängden till* X mängden som består av alla delmängder till X. Vi betecknar potensmängden till X med $\mathscr{P}(X)$.

Exempel 2.2.2. Betrakta mängden $X = \{1, 2, 3\}$. Då är

$$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Notera att både $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$ och $X \in \mathscr{P}(X)$. Detta beror på att både $\varnothing$ och X är delmängder till X. ▲

Exempel 2.2.3. Om Ω är ett utfallsrum så är $\mathscr{P}(\Omega)$ helt enkelt mängden av alla händelser, eftersom en händelse är en delmängd till utfallsrummet. ▲

Definition 2.2.4. Låt Ω vara ett utfallsrum. Ett *sannolikhetsmått på* Ω är en funktion $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ som uppfyller:

1. För varje händelse $A \subseteq \Omega$ gäller $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
2. Vi har att $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ och $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Antag att $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är händelser som uppfyller $A_n \cap A_m = \varnothing$ för varje $n, m \geqslant 1$ med $n \neq m$. Då gäller

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots .$$

Villkoret i punkt 3 ovan, att $A_n \cap A_m = \varnothing$ då $n \neq m$, är viktigt att uppmärksamma. Detta innebär att händelserna $A_1, A_2, \ldots$ inte har några gemensamma utfall, det vill säga att mängderna $A_1, A_2, \ldots$ inte har några gemensamma element. När detta är uppfyllt brukar man säga att händelserna är *parvis oförenliga*, eller, om man så vill, att mängderna är *parvis disjunkta*.

Definition 2.2.5. Om Ω är ett utfallsrum och $\mathbb{P}$ ett sannolikhetsmått på Ω säger vi att $(\Omega, \mathbb{P})$ är ett *sannolikhetsrum*.

Ska vi vara nogräknade så säger Definition 2.2.4 bara något om vad som händer då vi tar unionen av *oändligt* många parvis oförenliga mängder, så följande kan vara på sin plats att poängtera:

Sats 2.2.6. *Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och A och B parvis oförenliga händelser. Då gäller*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B). \tag{2.1}$$

Bevis. Låt $A_1 = A$, $A_2 = B$ och $A_3 = A_4 = A_5 = \cdots = \varnothing$. Eftersom $A \cap B = \varnothing$ så gäller $A_n \cap A_m = \varnothing$ närhelst $n \neq m$. Per definition gäller nu

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots$$

och eftersom $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = A \cup B$ och $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ för alla $n \geqslant 3$ så följer (2.1). □

Ovanstående definitioner stämmer med vår intuitiva uppfattning om sannolikhet såtillvida att det är för händelser, det vill säga för delmängder till utfallsrummet, man kan bestämma sannolikheten.

Det som kanske kan vara förvirrande för läsaren är att man pratar om *ett* sannolikhetsmått. Finns det flera olika sannolikheter? Ja, med ovanstående definition är det så. Vi bryr oss inte om att peka ut ett sannolikhetsmått som det "verkliga" i det här läget utan nöjer oss med att sannolikhetsmåtten har egenskaperna 1–3. Ett bra sätt att se det på är att olika sannolikhetsmått motsvarar olika modeller av verkligheten.

Exempel 2.2.7. Låt $\Omega = \{a, b, c\}$. Då är

$$\mathscr{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Betrakta funktionerna $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definierad av följande tabell:

A	$\mathbb{P}_1(A)$	$\mathbb{P}_2(A)$
$\varnothing$	0	0
$\{a\}$	1/3	1/2
$\{b\}$	1/3	1/4
$\{c\}$	1/3	1/4
$\{a, b\}$	2/3	3/4
$\{a, c\}$	2/3	3/4
$\{b, c\}$	2/3	1/2
$\{a, b, c\}$	1	1

Att både $\mathbb{P}_1$ och $\mathbb{P}_2$ är sannolikhetsmått på Ω, inser man genom att kontrollera de tre villkoren i Definition 2.2.4.

Frågan är nu om det finns något vettigt sätt att tolka sannolihetsrummen $(\Omega, \mathbb{P}_1)$ och $(\Omega, \mathbb{P}_2)$ på. Ett sätt är följande:

Tänk dig att du drar en kula ur en påse med tre kulor i. Kulorna är märkta med a, b, och c. När vi drar en kula kan vi tolka det som ett utfall ur Ω.

En tänkbar situation är att det är lika sannolikt att vi drar vilken som helst av de tre kulorna. Detta betyder att vi betraktar sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}_1$ på Ω, eftersom detta sannolikhetsmått tilldelar sannolikheten 1/3 till var och en av händelserna $\{a\}$, $\{b\}$ och $\{c\}$, det vill säga händelserna att man drar kula a, b respektive c ur påsen. Vidare kan exempelvis händelsen $\{a, b\}$ tolkas som att vi drar någon av kulorna a och b. Händelsen $\{a, b, c\}$, det vill säga att vi drar någon kula över huvud taget får naturligtvis sannolikhet 1.

En annan tänkbar situation är att kula a är mycket lättare än de andra och därmed ofta hamnar överst i påsen så att den i snitt blir dragen varannan gång, medan de andra kulorna blir dragna i snitt en fjärdedel av gångerna vardera. Denna situation motsvarar sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}_2$.

Här ser vi alltså att det är helt rimligt att kunna betrakta olika sannolikhetsmått på samma utfallsrum.

Betrakta till sist funktionen $\mathbb{P}_3 : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ given av:

A	$\mathbb{P}_3(A)$
$\varnothing$	0
$\{a\}$	1/3
$\{b\}$	1/3
$\{c\}$	1/3
$\{a, b\}$	1/2
$\{a, c\}$	2/3
$\{b, c\}$	2/3
$\{a, b, c\}$	1

Detta är *inte* ett sannolikhetsmått på Ω eftersom om vi låter $A = \{a\}$ och $B = \{b\}$ så gäller $A \cap B = \varnothing$, det vill säga att A och B är parvis oförenliga, men

$$\mathbb{P}_3(A \cup B) = \mathbb{P}_3(\{a, b\}) = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} = \mathbb{P}_3(\{a\}) + \mathbb{P}_3(\{b\}) = \mathbb{P}_3(A) + \mathbb{P}_3(B).$$

Alltså gäller inte resultatet i Sats 2.2.6 och därmed kan inte $(\Omega, \mathbb{P}_3)$ vara ett sannolikhetsrum. ▲

Exempel 2.2.8. Säg att vi har ett ändligt utfallsrum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$ som består av n element. Ett naturligt sätt att definiera ett sannolikhetsmått på denna mängd är att låta

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n},$$

för alla händelser $A \subseteq \Omega$. Detta betyder alltså att sannolikheten för en händelse A är antalet utfall i mängden A, dividerat med det totala antalet utfall, n. Sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}$ kallas i detta fall för *likformig sannolikhet* eller för det *likformiga sannolikhetsmåttet.* I synnerhet gäller

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \cdots = \frac{1}{n}.$$

Att $\mathbb{P}$ verkligen är ett sannolikhetsmått är lätt att visa, men vi gör det inte här. ▲

I ovanstående exempel beskrevs sannolikhetsmåtten $\mathbb{P}_1$ och $\mathbb{P}_2$ genom att ange sannolikheten för varje händelse, det vill säga för varje mängd i $\mathscr{P}(\Omega)$. Det säger sig själv att detta inte är en praktisk metod om Ω innehåller många, eller oändligt många, element. Därför kan följande vara intressant:

Sats 2.2.9. *Låt Ω vara ett oändligt utfallsrum. Skriv $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ där $\omega_n \neq \omega_m$ om $n \neq m$. Låt $p_1, p_2, p_3, \ldots \geqslant 0$ vara sådana att $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$. Då finns ett unikt sannolikhetsmått $\mathbb{P}$ på Ω sådant att*

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = p_1, \quad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = p_2, \quad \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = p_3, \quad \ldots.$$

Beviset för denna sats bygger på material ur Kapitel 5 och därför väntar vi med beviset tills dess.

I fortsättningen behöver vi alltså inte ange sannolikheten för *varje* händelse när vi beskriver sannolikhetsmått, utan det räcker att ange sannolikheterna för händelserna $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\ldots$, eftersom sannolikheten för exempelvis händelsen $\{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$ fås genom att addera sannolikheterna för händelserna $\{\omega_1\}$ och $\{\omega_2\}$.

Satsen ovan uttalar sig bara om oändliga utfallsrum, men att visa samma sak för ändliga utfallsrum görs på liknande sätt och lämnas till läsaren:

Sats 2.2.10. *Låt $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ vara ett ändligt utfallsrum och antag att $\omega_n \neq \omega_m$ närhelst $n \neq m$. Låt de rella talen $p_1, p_2, \ldots, p_N \geqslant 0$ uppfylla $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$. Då finns ett unikt sannolikhetsmått på Ω sådant att*

$$\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots, N.$$

I alla exempel hittils har utfallsrummet varit ändligt. Låt oss avsluta med ett exempel med oändligt utfallsrum.

Exempel 2.2.11. Låt $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Definiera ett sannolikhetsmått $\mathbb{P}$ på Ω som uppfyller

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{8}, \quad \ldots$$

med hjälp av Sats 2.2.9. Detta fungerar eftersom

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathbb{P})$ illustrerar det som kallas den *geometriska sannolikhetsfördelningen.* Ett sätt att tolka situationen på är att vi singlar slant tills vi får krona. Utfallen $1, 2, 3, \ldots$ visar hur många slantsinglingar som behövdes, och anledningen till att vi väljer sannolikheterna så som vi gör är att sanolikheten för att få krona på ett givet kast är $1/2$. Om vi får krona på andra kastet så måste vi fått klave på det första, och sannolikheten för detta är $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Att få krona först på tredje försöket är att få klave de två första gångerna och sedan krona, och sannolikheten för detta är $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$, och så vidare. Exempel på händelser är

$$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \quad \text{och} \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

där A motsvarar att det tar ett jämnt antal slantsinglingar tills vi får krona och B motsvarar att det tar högst fyra slantsinglingar tills vi får krona. Sannolikheterna för dessa händelser ges av

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Det är alltså *inte* så som många tror att sannolikheten för att få krona efter ett jämnt antal slantsinglingar är 1/2. Detta kan förklaras med att det exempelvis är mer sannolikt att få en krona efter ett kast än efter två, och mer sannolikt efter tre kast än efter fyra. Alltså är det mer sannolikt att få krona efter ett udda antal kast än efter ett jämnt antal. ▲

2.3 Anmärkningar om dessa definitioner

Det kan vara bra att påpeka att definitionerna ovan är något förenklade. Vi har inskränkt oss till uppräkneliga utfallsrum, vilket inte är standard. Anledningen är att man på detta sätt kan gå igenom grunderna för den intressanta sannolikhetsteorin på ett rigoröst sätt, utan att behöva ägna lång tid åt mer omfattande teori.

Övningar

Övning 2.1. Antag att du kastar tre tärningar där alla utfall av tärningarna är lika sannolika. Vad är sannolikheten att de tre tärningarna visar samma siffra?

Övning 2.2. Antag att du kastar tre tärningar där alla utfall av tärningarna är lika sannolika. Vad är sannolikheten för att summan av de tre siffrorna, som tärningarna visar, är 4?

Övning 2.3. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och låt $A \subseteq \Omega$ vara en händelse. Komplementet A^c definierar vi som mängden

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\},$$

det vill säga alla element i Ω som *inte* ligger i A. Visa att $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Övning 2.4. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och låt A vara en händelse. Låt även B vara en händelse och antag att $B \subseteq A$. Visa att $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$.

3 Oberoende händelser och betingad sannolikhet

3.1 Oberoende händelser

Oberoende händelser är ett viktigt begrepp inom sannolikhetsteorin och formaliserar det vi menar när vi till vardags säger att händelser är oberoende av varandra. Om två personer singlar slant, så räknar vi normalt inte med att den ena personens resultat har någon inverkan på det andra resultatet; de två händelserna är oberoende. Hur ser det sannolikhetsrum ut som beskriver denna situation?

Vi låter $+$ beteckna krona och $-$ beteckna klave. Med dessa beteckningar sätter vi

$$\Omega = \{(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)\}.$$

där till exemepel elementet $(+,-)$ beskriver att person 1 har fått krona och person 2 har fått klave. Om vi vill att dessa fyra händelser ska vara lika sannolika, vilket verkar högst rimligt om vi anser att utfallen av de två händelserna inte har med varandra att göra, så sätter vi $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/4$ för alla $\omega \in \Omega$. Från Sats 2.2.10 vet vi att detta definierar ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathbb{P})$.

Sannolikheten att person 1 får krona är alltså

$$\mathbb{P}(\{(+,+),(+,-)\}) = \mathbb{P}(\{(+,+)\}) + \mathbb{P}(\{(+,-)\}) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Sannolikheten att person 2 får krona är

$$\mathbb{P}(\{(+,+),(-,+)\}) = \mathbb{P}(\{(+,+)\}) + \mathbb{P}(\{(-,+)\}) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Sannolikheten att både person 1 och 2 får krona är $\mathbb{P}(\{(+,+)\}) = 1/4$. Vi noterar att i detta exempel får vi sannolikheten för att både person 1 och 2 får krona genom att multiplicera sannolikheten att person 1 får krona, med sannolikheten att person 2 får krona. I själva verket tar vi detta som definition på att två händelser är oberoende.

Definition 3.1.1. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. De två händelserna A och B sägs vara *oberoende* om

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Detta stämmer väl med vår uppfattning om hur vi ser på sannolikheten att två helt oberoende händelser inträffar; vi multiplicerar helt enkelt sannolikheterna för de två händelserna. Utfall av upprepade tärningskast och slantsinglingar är typiska exempel på oberoende händelser som vi använder oss flitigt av.

Exempel 3.1.2. Kalle och Lisa kastar varsin tärning och vi antar att sannolikheten är $1/6$ att Kalle får en sexa, och att sannolikheten är $1/6$ att även Lisa får en sexa. Om vi antar att händelserna är oberoende, så är sannolikheten $1/36$ att både Kalle och Lisa får sexor. ▲

Exempel 3.1.3. Antag att du drar två kort efter varandra ur en kortlek, utan att lägga tillbaka det första kortet i leken. Utfallen av dessa två dragningar är *inte* oberoende. Exempelvis kan du få hjärter kung i första dragningen, vilket gör att du inte kan få hjärter kung i den andra dragningen. Alltså påverkas resultatet av den andra dragningen av resultatet av den första dragningen. ▲

3.2 Betingad sannolikhet

Antag att vi har 10 kulor och 15 kuber blandade i en svart påse. Av de 10 kulorna så är 2 blå och 8 röda, och av de 15 kuberna är 5 blå och 10 röda.

	Blå	Röd
Kula	2	8
Kub	5	10

Vi skapar ett sannolikhetsrum genom att låta Ω vara mängden av de 25 objekten. Sedan definierar vi $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/25$ för alla $\omega \in \Omega$. Att detta verkligen är ett sannolikhetsrum vet vi återigen från Sats 2.2.10. Sannolikheten att få upp en blå kula då vi sticker ned handen i påsen är alltså $2/25$.

Antag nu att vi känner att det är en kula vi har i handen, hur stor sannolikhet är det att den är blå? Läsaren kan säkert snabbt svara på frågan; eftersom det finns 10 kulor varav 2 är blå, så är sannolikheten $2/10$. Vad vi i själva verket har gjort i och med detta resonemang är att skapa ett nytt sannolikhetsrum, nämligen Ω' bestående av alla 10 kulor med $\mathbb{P}'(\{\omega\}) = 1/10$ för alla $\omega \in \Omega'$. I detta exempel är det både enkelt och naturligt att skapa sig ett nytt sannolikhetsrum, men i mer komplicerade fall är det önskvärt att svara på liknande frågor *utan* att göra detta. Vi inför därför *betingad sannolikhet.*

Definition 3.2.1. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum, och låt A och B vara två händelser. Vi definierar $\mathbb{P}(B|A)$, den *betingade sannolikheten* för B givet att A har inträffat, som

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Med andra ord beskriver $\mathbb{P}(B|A)$ sannolikheten att B inträffar, givet att A redan har inträffat.

Anmärkning 3.2.2. Vad som egentligen händer i definitionen ovan är att vi från utfallsrummet Ω begränsar oss till ett mindre utfallsrum – mängden A. Eftersom vi vill att sannolikheten för A skall vara 1 i det nya utfallsrummet och samtidigt behålla de relativa sannolikheterna, så multiplicerar vi alla sannolikheter med $1/\mathbb{P}(A)$.

Anmärkning 3.2.3. Om vi antar att A och B är *oberoende* händelser, så får vi att (kom ihåg Definition 3.1.1)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B),$$

det vill säga att sannolikheten för att B inträffar beror inte på om A har inträffat eller ej.

Låt oss tillämpa betingad sannolikhet på vårt exempel med kul- och kubpåsen. Vi vill alltså beräkna sannolikheten att vi får upp ett blått objekt, givet att vi håller i en kula. Vi låter A vara mängden av alla element som är kulor, och låter B vara mängden av alla blå objekt. Sannolikheten vi söker ges av $\mathbb{P}(B|A)$. Vi beräknar

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cap B) = 2/25 \\
&\mathbb{P}(A) = 10/25 \\
&\mathbb{P}(B|A) = \frac{2/25}{10/25} = \frac{2}{10},
\end{aligned}$$

vilket sammanfaller med vårt tidigare resultat.

3.3 Har kungen en syster?

En vacker dag träffar du på Kungen i Ingenmansland. Han säger att han har precis *ett* syskon; hur stor sannolikhet är det att han har en syster?

Vi låter utfallsrummet Ω bestå av alla ordnade par av barn som en kvinna kan föda, det vill säga

$$\Omega = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\},$$

där f står för flicka och p står för pojke. Vi antar vidare att det är lika sannolikt att det föds en pojke som en flicka och sätter därför $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/4$ för alla $\omega \in \Omega$. Från Sats 2.2.10 vet vi att $(\Omega, \mathbb{P})$ är ett sannolikhetsrum.

Anmärkning 3.3.1. Läsaren undrar kanske varför vi väljer alla *ordnade* par av barn? Varför kan inte Ω bestå av de tre *oordnade* paren $\{p,p\},\{p,f\},\{f,f\}$? Det kan vi förvisso göra, men om vi vill ha en rimlig överensstämmelse med verkligheten så kan vi inte välja $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/3$ för alla $\omega \in \Omega$, eftersom det skulle ge en övervikt av familjer där båda barnen har samma kön. Det finns bara ett sätt att föda två pojkar på (först en pojke, och sedan en pojke), medan det finns två sätt att föda en flicka och pojke på (först en flicka och sedan en pojke, eller först en pojke och sedan en flicka).

Nu beräknar vi den betingade sannolikheten att ett av syskonen är en flicka, givet att ett av syskonen är en pojke. Vi låter A vara mängden av alla par där ett av syskonen är en pojke, och låter B vara mängden av alla par där ett av syskonen är en flicka.

$$\begin{aligned}
&A = \{(p,p),(f,p),(p,f)\} \qquad B = \{(f,f),(f,p),(p,f)\} \\
&A \cap B = \{(f,p),(p,f)\} \\
&\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Det är alltså 2/3 chans att Kungen har en syster!

Med all rätt är det nog en del som protesterar lite mot våra antaganden. Är det inte så att Kungen måste vara den förstfödde i familjen, eller åtminstone den förstfödde pojken? Vi lämnar det som en övning att visa att om vi antar att Kungen är den förstfödde så sjunker ovan nämnda sannolikhet till 1/2.

3.4 Bilen och getterna

Du är med i en TV-show, där möjligheten finns att vinna en bil. Programledaren presenterar dramatiskt tre dörrar, och talar om att bakom en av dem finns bilen, och bakom de andra två finner du en get. Han ber dig att peka på den dörr där du tror att bilen finns. Du pekar på en av dörrarna och i nästa sekund öppnar programledaren, inte den dörr du pekar på, utan en av de andra dörrarna där det döljer sig en get. Kvar finns alltså två oöppnade dörrar - den du pekar på och en till. Programledaren ler och frågar dig om du fortfarande står fast vid ditt val, eller om du möjligtvis vill byta till den andra oöppnade dörren? Om du vill maximera sannolikheten att du vinner bilen, ska du då byta dörr eller hålla fast vid den du först valde?

Denna fråga kan man besvara på många sätt, men låt oss försöka använda den teori vi just har byggt upp. Numrera dörrarna med 1, 2 och 3, så att bilen befinner sig bakom dörr 1. Vi låter utfallsrummet Ω bestå av triplar av tal (n, m, l), där n står för dörren du först valde, m står för dörren som programledaren öppnar, och l står för dörren du slutligen bestämmer dig för. Till exempel så betyder $(1, 2, 1)$ att du först pekar på dörr 1, sedan öppnar programledaren dörr 2, och du bestämmer dig för att stå fast vid ditt val och slutligen välja dörr 1. Vi kan skriva Ω som

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8\}$$

där

$$\begin{aligned} &\omega_1 = (1,2,1), \quad &&\omega_2 = (1,2,3), \quad &&\omega_3 = (1,3,1), \quad &&\omega_4 = (1,3,2), \\ &\omega_5 = (2,3,2), \quad &&\omega_6 = (2,3,1), \quad &&\omega_7 = (3,2,3), \quad &&\omega_8 = (3,2,1). \end{aligned}$$

Anmärkning 3.4.1. Varför finns det fyra element där första siffran är 1, men bara två element där den första siffran är 2? Eftersom vi antar att bilen finns bakom dörr 1, så återstår det två dörrar med getter bakom om vi pekar på dörr 1. Programledaren kan alltså välja att öppna dörr 2 eller 3. Pekar vi däremot på dörr 2, så finns det bara ett val för programledaren - han måste öppna dörr 3 för att finna en get.

Nu återstår det att definiera $\mathbb{P}$ så att sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathbb{P})$ reflekterar det problem vi vill lösa. Ett naturligt antagande är att det är lika sannolikt att från början välja någon av de tre dörrarna; alltså vill vi sätta

$$\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = \mathbb{P}(\{\omega_5, \omega_6\}) = \mathbb{P}(\{\omega_7, \omega_8\}) = 1/3.$$

Inom dessa tre grupper antar vi vidare att alla händelser är lika sannolika, det vill säga

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{3}/4 = 1/12 \\
&\mathbb{P}(\{\omega_5\}) = \mathbb{P}(\{\omega_6\}) = \frac{1}{3}/2 = 1/6 \\
&\mathbb{P}(\{\omega_7\}) = \mathbb{P}(\{\omega_8\}) = \frac{1}{3}/2 = 1/6
\end{aligned}
$$

Låt oss nu beräkna sannolikheten för vinst givet att vi byter dörr. Vi låter A vara mängden av element där vi har bytt dörr, och B mängden av element som representerar en vinst av bilen. Alltså har vi

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\} \qquad \text{och} \qquad B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_6, \omega_8\},$$

från vilket det följer att $A \cap B = \{\omega_6, \omega_8\}$ och

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Sannolikheten för vinst givet att vi byter dörr är alltså $2/3$! Låt oss beräkna sannolikheten för vinst givet att vi inte byter dörr; vi sätter C till mängden av element där vi inte byter dörr. Alltså har vi

$$C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7\},$$

från vilket det följer att $C \cap B = \{\omega_1, \omega_3\}$

$$\mathbb{P}(B|C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}.$$

En annan analys, som kanske på ett bättre sätt ”förklarar” resultatet är följande: När du från början pekar på en dörr har du $1/3$ chans att peka på dörren med bilen. Detta betyder att i $2/3$ av fallen så kommer du att ha pekat på fel dörr, och vinner således på att byta dörr. Problemet med resonemang av detta slag är att det är lätt att tänka fel då komplexiteten ökar.

Övningar

Övning 3.1. Du träffar på en man som säger: ”Jag är den förstfödde i en familj med två barn”. Hur stor sannolikhet är det att han har en syster?

Övning 3.2. Antag att sannolikheten att en elev läser tyska är 1/10 och sannolikheten att en elev läser både spanska och tyska är 5/1000. En dag träffar du på Lisa i korridoren, och det visar sig att hon läser tyska. Vad är sannolikheten att hon också läser spanska?

Övning 3.3. Du spelar ett tärningsspel med två tärningar, där du satsar 1000 kr och vinner 40 000 kr om du slår en dubbel-sexa. Spänningen är stor, och du rullar båda tärningarna. En av dem stannar på bordet och visar en sexa, men den andra rullar av och hamnar på golvet under din stol. Beräkna, med hjälp av betingad sannolikhet, sannolikheten att även den andra tärningen visar en sexa.

Övning 3.4. Du singlar slant tre gånger efter varandra. Hur stor är sannolikheten att du får två kronor? Hur stor är sannolikheten att du får två kronor om du råkar se att en av slantarna ger klave?

4 Stokastiska variabler

4.1 Introduktion

Hittills har vi studerat sannolikheten för att en viss händelse skall inträffa, och detta är naturligtvis fundamentet i sannolikhetsteorin. Det visar sig dock vara mycket användbart att införa begreppet *stokastisk variabel*, för att beskriva en storhet som är beroende av en viss händelse. Antag att du kastar två tärningar efter varandra, och är intresserad av summan av siffrorna de två tärningarna visar. Till exempel, om tärningarna visar 4 och 1 så kommer summan att anta värdet 5; om tärningarna visar 6 och 5, så kommer summan att anta värdet 11. Alltså, vid varje kast kommer vi få ett tal som beror av vad tärningarna visar. Vi kan på detta sätt betrakta summan som ett slumpmässigt tal. "Summan av tärningskasten" är ett exempel på en stokastisk variabel X – ett tal som beror av utfallen i utfallsrummet.

Låt oss välja utfallsrummet Ω till att bestå av alla människor som är svenska medborgare. Exempel på stokastiska variabler är: en persons längd, hur många gånger personen har varit gift, årsinkomst, antal släktingar, och så vidare.

I termer av sannolikhetsteori så är en stokastisk helt enkelt ett sätt att tilldela ett tal till varje utfall i ett sannolikhetsrum.

4.2 Definition och sannolikhetsfunktion

Definition 4.2.1. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. En *stokastisk variabel* X på $(\Omega, \mathbb{P})$ är en funktion

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Exempel 4.2.2. Antag att du kastar en tärning två gånger och vi vill studera summan av de två tärningskasten med hjälp av en stokastisk variabel. Utfallsrummet Ω består således av ordnade talpar $\omega = (a, b)$ där $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vi låter den stokastiska variabeln X vara summan av de två tärningskasten, det vill säga vi definierar X genom $X(\omega) = a + b$ för alla $\omega = (a, b) \in \Omega$. ▲

Exempel 4.2.3. Du spelar ett spel genom att singla en slant fem gånger där du vinner en krona om krona kommer upp då du kastar myntet. Vi låter en stokastisk variabel X vara det antal kronor som du har vunnit då spelet är slut. ▲

Exempel 4.2.4. Ett trivialt, men dock användbart, exempel på en stokastisk variabel X får vi genom definitionen $X(\omega) = a$ för alla $\omega \in \Omega$. Den stokastiska variabeln X ger alltså det reella talet a för alla element i Ω. Vi säger att X är en *konstant* stokastisk variabel. ▲

Från givna stokastiska variabler är det användbart att kunna prata om deras summa och produkt. Vi gör därför följande definition:

Definition 4.2.5. Om X och Y är stokastiska variabler på ett sannolikhetrum $(\Omega, \mathbb{P})$ så definierar vi de stokastiska variablerna $Z = X + Y$ och $W = XY$ genom

$$Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \quad \text{och} \quad W(\omega) = X(\omega)Y(\omega) \tag{4.1}$$

för varje $\omega \in \Omega$.

En naturlig fråga gällande stokastiska variabler är: Vad är sannolikheten att den stokastiska variabeln X antar värdet x? Till exempel: Vad är sannolikheten att summan blir 5, vid kast av två tärningar? Vad är sannolikheten att jag vinner 3 kronor då jag singlar en slant fem gånger?

Definition 4.2.6. Låt X vara en stokastisk variabel på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathbb{P})$. För varje $x \in \mathbb{R}$ sätter vi

$$p_X(x) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}\big).$$

Detta definerar en funktion $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som vi kallar *sannolikhetsfunktionen* för den stokastiska variabeln X. Värdet $p_X(x)$ är sannolikheten att X antar värdet x. Om två stokastiska variabler X och Y har samma sannolikhetsfunktion, det vill säga $p_X(x) = p_Y(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$, så säger vi att de är *likafördelade.*

Anmärkning 4.2.7. Mängden $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ består av de element i Ω för vilka X antar värdet x. Detta betyder att mängden $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ är händelsen att den stokastiska variabeln X antar värdet x.

Exempel 4.2.8. Vi låter X, som i Exempel 4.2.2, vara summan av siffrorna som ett kast med två tärningar ger. Låt A vara händelsen att summan antar värdet 4. Vi får att

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 4\} = \{(1,3), (3,1), (2,2)\},$$

eftersom $X\big((1,3)\big) = X\big((3,1)\big) = X\big((2,3)\big) = 4.$ ▲

Exempel 4.2.9. I Exempel 4.2.2 definierade vi en stokastisk variabel X till att vara summan av två tärningskast. Låt oss nu beräkna sannolikhetsfunktionen för X, det vill säga sannolikheten att summan antar ett visst värde. Först och främst noterar vi att $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \varnothing$ då $x \notin \{2, 3, \dots, 12\}$ eftersom summan av två tärningskast måste ligga i denna mängd. Från Definition 2.2.4 (punkt 2) följer det att $p_X(x) = 0$ då x inte är något talen $2, 3, \dots, 12$. Vidare beräknar vi

$$\begin{aligned}
p_X(2) &= \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = 1/36\\
p_X(3) &= \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = 2/36\\
p_X(4) &= \mathbb{P}(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}) = 3/36\\
p_X(5) &= \mathbb{P}(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}) = 4/36\\
p_X(6) &= \mathbb{P}(\{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3)\}) = 5/36\\
p_X(7) &= \mathbb{P}(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}) = 6/36\\
p_X(8) &= \mathbb{P}(\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}) = 5/36\\
p_X(9) &= \mathbb{P}(\{(6,3),(3,6),(4,5),(5,4)\}) = 4/36\\
p_X(10) &= \mathbb{P}(\{(6,4),(4,6),(5,5)\}) = 3/36\\
p_X(11) &= \mathbb{P}(\{(5,6),(6,5)\}) = 2/36\\
p_X(12) &= \mathbb{P}(\{(6,6)\}) = 1/36.
\end{aligned}$$

Vi noterar att det är störst sannolikhet att summan blir 7. ▲

Exempel 4.2.10. Den konstanta stokastiska variabeln X, definierad som $X(\omega) = a$ i Exempel 4.2.4, har en sannolikhetsfunktion som ges av $p_X(a) = 1$ och $p_X(x) = 0$ då $x \neq a$. ▲

Det är praktiskt att utvidga definitionen av sannolikhetsfunktion till ändliga delmängder av $\mathbb{R}$ genom

$$p_X(V) = p_X(v_1) + p_X(v_2) + \cdots + p_X(v_n),$$

där $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}$ med $v_n \neq v_m$ då $m \neq n$. Detta talar om hur stor sannolikheten är att den stokastiska variabeln X antar *något* av värdena i V.

Exempel 4.2.11. Låt $A = \{2, 5\}$ och låt X vara definierad som i Exempel 4.2.9. Vi får att

$$p_X(A) = p_X(2) + p_X(5) = 1/36 + 4/36 = 5/36,$$

vilket säger att sannolikheten är 5/36 att summan blir antingen 2 eller 5. ▲

4.3 Oberoende stokastiska variabler

Precis som två händelser kan vara oberoende av varandra, kan också två stokastiska variabler vara oberoende av varandra.

Definition 4.3.1. Låt X, Y vara två stokastiska variabler på sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathbb{P})$. Vi säger att X och Y är *oberoende* om de två händelserna

$$\begin{aligned}
A_x &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}\\
B_y &= \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\}
\end{aligned}$$

är oberoende för alla $x, y \in \mathbb{R}$, det vill säga om

$$\mathbb{P}(A_x \cap B_y) = \mathbb{P}(A_x)\mathbb{P}(B_y).$$

Att två stokastiska variabler är oberoende av varandra betyder således att utfallet av den ena inte påverkas av utfallet av den andra stokastiska variabeln.

4.4 Exempel på fördelning: För-första-gången-fördelning

Som namnet antyder så uppträder en stokastisk variabel med denna fördelning när man väntar på att något skall hända för första gången. Antag att vi kastar en tärning ett upprepat antal gånger tills vi får en sexa. Vad är sannolikheten att vi behöver kasta tärningen precis k gånger? Denna sannolikhet räknar vi ut på följande sätt: Låt p vara sannolikheten för att den önskade händelsen inträffar - i fallet med tärningen är $p = 1/6$. Sannolikheten att händelsen *inte* inträffar är således $1-p$. Detta betyder att sannolikheten för att händelsen inte inträffar på $k-1$ försök är $(1-p)^{k-1}$ (då vi antar att försöken är oberoende). Detta måste vi sedan multiplicera med sannolikheten att händelsen faktiskt inträffar i det k:te försöket, det vill säga p. Alltså, sannolikheten att händelsen inträffar efter precis k försök är $(1-p)^{k-1}p$. En stokastisk variabel X som har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p \qquad \text{för } k = 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

kallar vi *för-första-gången-fördelad.*

Exempel 4.4.1. Låt oss definera ett sannolikhetsrum och en stokastisk variabel X som är relaterade till för-första-gången-fördelningen. Antag att vi kastar en tärning n gånger. Vi låter Ω vara mängden av alla ordnade följder av längd n, bestående av heltal mellan 1 och 6. Till exempel tillhör följden $(1, 1, 2, 6, 4, \dots, 2)$ mängden Ω. Vidare definierar vi $X(\omega)$ att vara den position i följden där den första sexan finns; exempelvis så är

$$\mathbb{P}\big((1, 1, 2, 6, 4, \dots, 2)\big) = 4.$$

Vi sätter även $X(\omega) = 0$ om det inte förekommer någon sexa i följden. Den stokastiska variabeln X kommer enligt tidigare resonemang att ha följande sannolikhetsfunktion

$$\begin{aligned}
&p_X(k) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k} \qquad \text{om} \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\},\\
&p_X(0) = (1 - 1/6)^n,\\
&p_X(x) = 0 \qquad \text{om} \qquad x \notin \{0, 1, 2, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Vi noterar att för $k = 1, 2, \dots, n$ sammanfaller denna funktion med sannolikhetsfunktionen för en för-första-gången-fördelad stokastisk variabel. ▲

Exempel 4.4.2. Antag att vi singlar en slant, där sannolikheten för att få krona eller klave är $1/2$. Sannolikheten att få den första kronan i det k:te kastet är

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

▲

Anmärkning 4.4.3. Det är nu lätt att missleda sig själv med följande tankegång: Om jag har fått 10 klavar på en rad då jag singlar en slant så måste sannolikheten vara stor, det vill säga mycket större än 1/2, att det blir en krona i nästa kast. Därför är det fördelaktigt att satsa ett större belopp på denna händelse. Detta resonemang leder en tyvärr direkt till fattighuset, eftersom vi antar att de olika kasten är *oberoende*. Detta betyder per definition att nästa kast med myntet inte beror på de tidigare – alltså är sannolikheten fortfarande 1/2 att vi får en krona i nästa kast! Vad vi har räknat ut i Exempel 4.4.2 är sannolikheten att vi får ett givet antal klavar och sedan en krona.

Övningar

Övning 4.1. Vad är sannolikheten att du får två ettor först i 7:e försöket vid kast med två tärningar?

Övning 4.2. Antag att du kastar tre tärningar samtidigt, och definierar den stokastiska variabeln X till att vara antalet ettor som kommer upp. Beräkna sannolikhetsfunktionen för X.

Övning 4.3. Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler på sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathbb{P})$. Visa att

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = k \text{ och } Y(\omega) = l\}\right)\\ &\quad = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = k\}\right) \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, Y(\omega) = l\}\right).\end{aligned}$$

Övning 4.4. Låt X vara antalet sexor som kommer upp, och låt Y vara antalet femmor som kommer upp, vid kast med två tärningar. Visa att X och Y inte är två oberoende stokastiska variabler.

5 Konvergens och summor

5.1 Konvergens av talföljder

Betrakta följden $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$. Man ser att denna följd av tal långsamt närmar sig 0, även om alla tal i följden är strikt större än 0. Vi säger att följden *konvergerar* mot 0. I detta avsnitt ska vi göra en exakt definition av konvergens, och se att den stämmer överens med ovanstående intuition.

Definition 5.1.1. En uppräkning av oändligt många (inte nödvändigtvis olika) reella tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kallas för en *talföljd* och betecknas $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definition 5.1.2. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd, och $a \in \mathbb{R}$. Vi säger att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergerar mot* a om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett positivt heltal N sådant att

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

för varje heltal $n \geqslant N$. I detta fall säger vi att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är *konvergent*, skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

och kallar a för ett *gränsvärde* till $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. En följd som inte är konvergent sägs vara *divergent*.

Exempel 5.1.3. Låt $a_n = 1 + 1/n$. Vi har alltså att

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{4}{3}, \quad \ldots.$$

Tag $\epsilon > 0$. Då finns det ett positivt heltal N sådant att $N > 1/\epsilon$, det vill säga sådant att $\epsilon > 1/N$. För varje $n \geqslant N$ gäller $1/n \leqslant 1/N < \epsilon$ och därmed

$$1 + \frac{1}{n} < 1 + \epsilon.$$

Dessutom gäller

$$1 - \epsilon < 1 < 1 + \frac{1}{n}.$$

Alltså har vi visat att $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, det vill säga att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot 1. ▲

Exempel 5.1.4. Låt $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = 1, \ldots$. Talföljden $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ är divergent. Detta kan bevisas med hjälp av följande motsägelseargument.

Antag att följden $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent och att $c \in \mathbb{R}$ är ett gränsvärde till följden. Låt $\epsilon = 1/4$. Enligt antagandet finns det ett positivt heltal N sådant att $c - \epsilon < c_n < c + \epsilon$ för varje $n \geqslant N$. Välj nu ett jämnt heltal $m \geqslant N$. Då är $c_m = 1$ och $c_{m+1} = 0$. Men vi vet också att $c_m < c + \epsilon$ och att $c - \epsilon < c_{m+1}$. Eftersom $\epsilon = 1/4$ så betyder detta att

$$c = (c - \epsilon) + \frac{1}{4} < c_{m+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{och att} \quad \frac{3}{4} = c_m - \frac{1}{4} < (c + \epsilon) - \frac{1}{4} = c,$$

det vill säga att $c < 1/4$ och $c > 3/4$. Detta är en omöjlighet. Alltså kan det inte finnas $c \in \mathbb{R}$ sådant att $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. ▲

Exempel 5.1.5. Låt $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \ldots$. Denna följd växer obegränsat och kan därför inte konvergera mot något reellt tal. ▲

Följande sats är mycket viktig, och har diskuterats i [1], och vi utelämnar därför beviset för den. Satsen visar på en av de mest grundläggande egenskaperna hos de reella talen.

Sats 5.1.6. *Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Antag att $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är* växande, *det vill säga att $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots$, och att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är* uppåt begränsad, *det vill säga att det finns ett $C \in \mathbb{R}$ sådant att $a_n < C$ för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$. Då finns ett tal $a \in \mathbb{R}$ sådant att*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

5.2 Summor

Detta avsnitt kommer att ägnas åt oändliga summor av typen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Vi har tidigare stött på en sådan summa i Definition 2.2.4 och i Sats 2.2.9, men om man ska vara nogrann så har vi aldrig definierat vad som menas med detta.

Vi börjar med att introducera en mycket vanlig notation. Låt $N \leqslant M$ vara heltal och $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots, a_M$ vara reella tal. Vi inför notationen

$$\sum_{n=N}^{M} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} \cdots + a_M.$$

Det kan vara värt att påpeka att denna summa bara innehåller ett ändligt antal, $M - N + 1$ stycken, termer och hur man adderar ett ändligt antal tal till varandra behöver vi *inte* definiera. Summasymbolen Σ är bara ett kortare sätt att skriva detta på.

Exempel 5.2.1. Låt $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1/2$, $a_4 = -1$ och $a_5 = -1/3$. Då är

$$\sum_{n=2}^{3} a_n = 7/2, \quad \sum_{n=1}^{5} a_n = 19/6 \quad \text{och} \quad \sum_{n=4}^{4} a_n = -1.$$

▲

Definition 5.2.2. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara reella tal och låt

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

för varje heltal $N \geqslant 1$. Alltså har vi att $S_N = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ och så vidare. Om talföljden $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärde S så säger vi att den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *konvergerar till* S och skriver

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

En oändlig summa som konvergerar till något reellt tal sägs vara *konvergent*. En oändlig summa som inte är konvergent sägs vara *divergent*.

Exempel 5.2.3. Låt oss betrakta den oändliga summan $1/2+1/4+1/8+\cdots$. Denna summa är konvergent och uppfyller:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Låt oss visa detta. Skriv

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N} \tag{5.1}$$

för $N = 1, 2, \ldots$. Observera att

$$\frac{1}{2} S_N = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}. \tag{5.2}$$

Genom att jämföra (5.1) och (5.2) ser vi att

$$\frac{1}{2} S_N = S_N - \frac{1}{2} S_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+1}}.$$

Därmed gäller

$$S_N = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+1}} \right) = 1 - \frac{1}{2^N}$$

och vi ser att $\lim_{N\to\infty} S_N = 1$ eftersom $\lim_{N\to\infty} 1/2^N = 0$. ▲

Det finns ett mycket kraftfullt kriterium för när oändliga summor är konvergenta. Satsen säger lite ledigt uttryckt att om summans svans kan göras godtyckligt liten så konvergerar summan. Detta kommer att användas flera gånger framöver. Beviset för denna sats finns i de flesta grundläggande böcker i matematisk analys, exempelvis i [7], men ingår inte i denna kurs.

Sats 5.2.4 (Cauchys konvergenskriterium)**.** *Betrakta en oändlig summa* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. *Denna summa är konvergent om och endast om det för varje* $\epsilon > 0$ *finns ett heltal* $J \geqslant 1$ *sådant att*

$$-\epsilon < \sum_{n=N}^{M} a_n < \epsilon$$

för alla heltal N, M *som uppfyller* $J \leqslant N \leqslant M$.

5.3 Absolutkonvergens

Säg att vi har en oändlig konvergent summa, och ändrar om ordningen på termerna. Får vi då en ny konvergent summa med samma gränsvärde? En märklig fråga kan tyckas, och ännu märkligare kanske man kan uppfatta svaret. Nej, generellt sett får vi inte det, vilket följande exempel visar:

Exempel 5.3.1. Betrakta talföljden som ges av

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = -\frac{1}{3}, \quad \dots$$

Man visar enkelt att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

Ett sätt att kasta om termerna $a_1, a_2, a_3, \dots$ på är att skriva

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = \frac{1}{3}, \quad b_5 = \frac{1}{4}, \quad b_6 = -\frac{1}{2}, \quad \dots,$$

men när man undersöker denna talföljd närmare visar det sig att den oändliga summan $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ konvergerar och att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \approx 0.6931.$$

Alltså har vi ett exempel på en summa som konvergerar till 0, men om man kastar om termerna konvergerar till ett annat tal. ▲

För att ta reda på vilka summor som inte beter sig så här inför vi begreppet *absolutkonvergens*. I denna definition behöver vi dra begreppet *absolutbelopp* till minnes. Absolutbeloppet av ett reellt tal a betecknas med $|a|$ och definieras som $-a$ om a är negativt och som a om a inte är negativt. Exempelvis har vi att $|-47| = 47$, $|3/2| = 3/2$ och $|-1.25| = 1.25$. En viktig egenskap för absolutbeloppet är att $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$ för alla reella tal a och b.

Anmärkning 5.3.2. Med hjälp av absolutbelopp kan vi formulera om Definition 5.1.2 på följande sätt: En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sägs *konvergera mot ett tal* a om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett heltal $N \geqslant 1$ sådant att

$$|a_n - a| < \epsilon$$

för varje $n \geqslant N$.

Definition 5.3.3. En oändlig summa $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ sägs vara *absolutkonvergent* om den oändliga summan $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$ är konvergent.

Här finns det en liten teknikalitet att poängtera. Låt den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ vara absolutkonvergent. I Definition 5.3.3 säger vi inget om att den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ måste vara konvergent i vanlig mening. Då kan man ju fråga sig om en oändlig summa kan vara absolutkonvergent men inte konvergent. Så är det naturligtvis inte, och vi börjar med att visa det.

Sats 5.3.4. *Låt $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ vara en absolutkonvergent oändlig summa. Då är summan också konvergent.*

Bevis. Tag $\epsilon > 0$ Per definition är summan $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$ konvergent. Enligt Cauchys konvergenskriterium (Sats 5.2.4) finns då ett heltal $J \geqslant 1$ sådant att

$$\sum_{n=N}^{M} |a_n| < \epsilon$$

för alla heltal $M \geqslant N \geqslant J$. Eftersom

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n \right| \leqslant \sum_{n=N}^{M} |a_n|$$

så följer

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n \right| < \epsilon$$

för alla heltal $M \geqslant N \geqslant J$. Det senare är bara ett annat sätt att skriva

$$-\epsilon < \sum_{n=N}^{M} a_n < \epsilon$$

och därmed uppfyller den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ Cauchys konvergenskriterium, vilket betyder att den är konvergent. $\square$

Nu är det dags för den huvudsakliga användningen av begreppet absolutkonvergens:

Sats 5.3.5. *Antag att den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ är absolutkonvergent. Låt $b_1, b_2, b_3, \ldots$ vara en omkastning av termerna $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Då är även den oändliga summan $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ konvergent och*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bevis. Låt $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ och tag $\epsilon > 0$. För $N = 1, 2, 3, \ldots$, låt

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N \quad \text{och } \tilde{S}_N = b_1 + b_2 + \cdots + b_N.$$

Att den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ är absolutkonvergent betyder att den oändliga summan $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$ är konvergent och enligt Cauchys konvergenskriterium finns ett heltal $J \geqslant 1$ sådant att

$$\sum_{n=N}^{M} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \tag{5.3}$$

för alla heltal N, M med $J \leqslant N \leqslant M$. Eftersom följden $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ konvergerar mot S så kan vi dessutom enligt Anmärkning 5.3.2 välja J så stort att

$$|S_J - S| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Att $b_1, b_2, b_3, \ldots$ är en omkastning av termerna $a_1, a_2, a_3, \ldots$ betyder att det finns en följd av heltal $n_1, n_2, n_3, \ldots$ i vilken varje heltal $1, 2, 3, \ldots$ förekommer precis en gång och sådan att

$$b_1 = a_{n_1}, \quad b_2 = a_{n_2}, \quad b_3 = a_{n_3}, \quad \ldots.$$

Om vi nu väljer $K > J$ tillräckligt stort så kommer alla talen $1, 2, 3, \ldots, J$ att förekomma bland $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_K$. Låt $m_1, m_2, \ldots, m_L$ vara en uppräkning av de tal bland $n_1, n_2, \ldots, n_K$ som är större än J. Nu gäller

$$\begin{aligned}\tilde{S}_K &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_K \\ &= a_{n_1} + a_{n_2} + a_{n_3} + \cdots + a_{n_K} \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_J + a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_L} \\ &= S_J + a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_L}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Låt M vara det största talet bland $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_L$ och $N = J + 1$. Eftersom $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_L$ alla är större än J så är $M \geqslant N$. Alltså har vi att $J \leqslant N \leqslant M$ och därmed visar (5.3) att

$$|a_{J+1}| + |a_{J+2}| + \cdots + |a_M| < \frac{\epsilon}{2},$$

vilket får till följd att

$$|a_{m_1}| + |a_{m_2}| + \cdots + |a_{m_L}| \leqslant |a_{J+1}| + |a_{J+2}| + \cdots + |a_M| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Kombinera nu (5.4) och (5.5) med det faktum att

$$|c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_\nu| \leqslant |c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_\nu|$$

för alla reella tal $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\nu$ och få

$$\begin{aligned}\left|\tilde{S}_K - S_J\right| &= |a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_L}| \\ &\leqslant |a_{m_1}| + |a_{m_2}| + \cdots + |a_{m_L}| \\ &< \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Nu följer

$$\begin{aligned}\left|\tilde{S}_K - S\right| &= \left|\tilde{S}_K - S_J + S_J - S\right| \\ &\leqslant \left|\tilde{S}_K - S_J\right| + |S_J - S| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Detta betyder att $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = S$, det vill säga att den oändliga summan $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ är konvergent och konvergerar mot S. □

Låt A vara någon uppräknelig oändlig mängd och räkna upp elementen som $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ där $a_n \neq a_m$ om $n \neq m$. Låt nu f vara en funktion $A \to \mathbb{R}$. Om vi antar att den oändliga summan $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots$ är absolutkonvergent så säger den ovanstående satsen att summan konvergerar, och att varje annat sätt att räkna upp mängden A på ger upphov till samma värde på summan. Detta betyder alltså att summan av funktionens f värden på uppräkneliga mängden A är oberoende av hur man räknar upp elementen i A, och därför använder vi notationen

$$\sum_{a \in A} f(a) \tag{5.6}$$

för detta värde. Det är viktigt att förstå att denna notation bara fungerar om summan är absolutkonvergent. Eftersom vi i summan (5.6) inte anger i vilken ordning elementen i mängden A ska räknas upp, så måste summan vara sådan att vi får samma värde oavsett ordning och det är just det absolutkonvergensen garanterar, enligt Sats 5.3.5.

Om mängden A är ändlig och $f : A \to \mathbb{R}$ använder vi samma beteckning för den ändliga summan $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_N)$ där $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Eftersom den är ändlig så är även denna summa oberoende av i vilken ordning man summerar termerna.

Exempel 5.3.6. Låt $A = \{-2, 1, 7, 3/2\}$. Då gäller

$$\sum_{x \in A} (2x + 1) = (2 \cdot (-2) + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 7 + 1) + \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 1\right) = 17$$

och

$$\sum_{x \in \{y \in A \,:\, y > 1\}} x^2 = \sum_{x \in \{3/2, 7\}} x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7^2 = \frac{205}{4}.$$

▲

Att en oändlig summa är absolutkonvergent betyder alltså att vi kan summera termerna på vilket sätt som helst och ändå få samma svar, och dessutom utan att få några konvergensproblem. Låt oss utan bevis skriva upp fyra viktiga tillämpningar av detta:

1. Låt A vara en uppräknelig, oändlig mängd och $A = B \cup C$ där B och C är oändliga mängder som uppfyller $B \cap C = \varnothing$. Antag att den oändliga summan $\sum_{x \in A} f(x)$ är absolutkonvergent. Då är de oändliga summorna $\sum_{x \in B} f(x)$ och $\sum_{x \in C} f(x)$ absolutkonvergenta och

$$\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in B} f(x) + \sum_{x \in C} f(x). \tag{5.7}$$

2. Allmänt gäller att om en oändlig summa $\sum_{x\in A} f(x)$ är absolutkonvergent så är även $\sum_{x\in B} f(x)$ absolutkonvergent för varje oändligt $B \subseteq A$. Om $\sum_{x\in A} f(x)$ är absolutkonvergent så gäller dessutom

$$\sum_{x\in B} |f(x)| \leqslant \sum_{x\in A} |f(x)| \tag{5.8}$$

för varje $B \subseteq A$.

3. Låt $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ vara en uppräknelig mängd, där $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är parvis disjunkta. Antag att den oändliga summan $\sum_{x\in A} f(x)$ är absolutkonvergent. Låt $S_n = \sum_{x\in A_n} f(x)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Då är den oändliga summan $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$ absolutkonvergent, och

$$\sum_{x\in A} f(x) = S_1 + S_2 + \cdots = \sum_{x\in A_1} f(x) + \sum_{x\in A_2} f(x) + \cdots . \tag{5.9}$$

4. Antag att de oändliga summorna $S_1 = a_1 + a_2 + \cdots$ och $S_2 = b_1 + b_2 + \cdots$ är absolutkonvergenta och låt $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots$ vara en uppräkning av elementen i mängden $\{(i, j) \; : \; i, j = 1, 2, \ldots\}$. Om vi sätter $c_k = a_{i_k} b_{j_k}$ så gäller det att

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + = S_1 S_2. \tag{5.10}$$

Det som händer här är alltså att vi tar en term ur summan S_1 och en term ur summan S_2 och multiplicerar dessa. Alla sådana kombinationer räknas upp som $c_1, c_2, c_3, \ldots$, och produkten $S_1 S_2$ är helt enkelt den oändliga summan $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$.

Detta kan jämföras med vad som händer i det ändliga fallet. Låt $S_1 = a_1 + a_2 + a_3$ och $S_2 = b_1 + b_2$. Då har vi ju att

$$S_1 S_2 = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_3 b_2,$$

det vill säga att produkten $S_1 S_2$ är summan av alla produkter $a_i b_j$ där a_i kommer från summan S_1 och b_j kommer från summan S_2.

Bevis av Sats 2.2.9. Vi påminner om att $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots\}$ Låt $f(\omega_n) = p_n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Eftersom $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$ och $|p_n| = p_n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ så är den oändliga summan $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ absolutkonvergent, och därmed är också den oändliga summan $\sum_{\omega\in A} f(\omega)$ absolutkonvergent för varje $A \subseteq \Omega$.

Definiera nu

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)$$

för varje $A \subseteq \Omega$. Vi sätter också $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$. Att punkt 1 och 2 i Definition 2.2.4 är uppfyllda är klart. För att visa att även punkt 3 är uppfylld, tag parvis oförenliga händelser $A_1, A_2, A_3, \ldots$ och notera att om

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

så gäller enligt (5.9)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{\omega\in A} f(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in A_1} f(\omega) + \sum_{\omega\in A_2} f(\omega) + \sum_{\omega\in A_3} f(\omega) + \cdots \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \cdots . \qquad \square
\end{aligned}$$

Övningar

Övning 5.1. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en konvergent talföljd. Visa att $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ har ett *unikt* gränsvärde, det vill säga visa att om det finns $a \in \mathbb{R}$ och $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ sådana att både

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$$

så måste $a = \tilde{a}$.

Övning 5.2. Visa att $1/4 + 1/16 + 1/64 + \cdots = 1/3$, det vill säga att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^N} = \frac{1}{3}.$$

Observera att detta användes utan bevis i Exempel 2.2.11. *Ledning:* Jämför med Exempel 5.2.3.

Övning 5.3. Antag att den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ är konvergent och uppfyller

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a.$$

Låt $c > 0$ och visa att den oändliga summan $ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots$ är konvergent och uppfyller

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca.$$

Övning 5.4. Det är välkänt att

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Använd detta för att visa att de oändliga summorna

$$S_1 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$$

och

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots$$

är konvergenta. Bestäm också $S_1 + S_2$.

6 Väntevärden

Säg att du singlar slant fyra gånger. Som vi sett tidigare kan ett *utfall* ω i denna situation tolkas som exempelvis:

$$\omega\colon \begin{array}{l} \text{Slant 1: krona} \\ \text{Slant 2: krona} \\ \text{Slant 3: klave} \\ \text{Slant 4: krona.} \end{array}$$

En *händelse* A består av ett antal utfall och skulle kunna exempelvis kunna vara:

$$A\colon \text{Vi får ett udda antal kronor.}$$

I Kapitel 4 mötte vi *stokastiska variabler* som var ett tal som bestämdes av det slumpmässiga utfall vi just fått. En typisk stokastisk variabel i detta fall är den som beskriver:

$$X\colon \text{Antalet kronor bland de fyra slantsinglingarna.}$$

Den stokastiska variabeln X får alltså ett värde som beror på utfallet. I utfallet ω ovan får denna stokastiska variabel värdet 3, vilket betyder att $X(\omega) = 3$. Vi ser en stokastiskt variabel som ett slumpmässigt tal.

Frågan i detta kapitel är hur vi ska hantera förväntningar på dessa stokastiska variabler. Om vi singlar slant fyra gånger, hur många kronor kan vi i genomsnitt förvänta oss att få? Det känns naturligt att svaret skulle vara 2, men i den terminologi som introduceras i detta kapitel formulerar vi frågan som: *Vad är väntevärdet för den stokastiska variabeln* X?

6.1 Definitioner och exempel

Definition 6.1.1. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X en stokastisk variabel på Ω. Antag att Ω är ändlig och skriv $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ där $\omega_n \neq \omega_m$ om $n \neq m$. Vi skriver

$$\mathbb{E}(X) = X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \cdots + X(\omega_N)\mathbb{P}(\{\omega_N\})$$

och kallar talet $\mathbb{E}(X)$ för *väntevärdet för* X.

Exempel 6.1.2. Låt $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ och definiera ett sannolikhetsmått $\mathbb{P}$ och en stokastisk variabel X på Ω genom tabellen:

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$
000	1/8	0
001	1/8	1
010	1/8	1
011	1/8	2
100	1/8	1
101	1/8	2
110	1/8	2
111	1/8	3

Vi får att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= X(000)\mathbb{P}(000) + X(001)\mathbb{P}(001) + \cdots + X(111)\mathbb{P}(111)\\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Det finns ett naturligt sätt att tolka Ω, $\mathbb{P}$, och X i detta fall. Tolkningen är att vi singlar slant tre gånger, där sannolikheten för krona och klave är lika stora. Exempelvis motsvarar utfallet 001 att vi får klave de två första gångerna men krona den tredje. Den stokastiska variabeln X motsvarar antalet gånger man får krona, och väntevärdet för detta är naturligtvis 1.5. ▲

För oändliga utfallsrum blir definitionen något mer komplicerad eftersom vi måste hantera en oändlig summa.

Definition 6.1.3. Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett oändligt sannolikhetsrum och X en stokastisk variabel på Ω. Om det finns en uppräkning av utfallen som $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ där $\omega_n \neq \omega_m$ om $n \neq m$ för vilken den oändliga summan

$$X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\}) + X(\omega_3)\mathbb{P}(\{\omega_3\}) + \cdots \tag{6.1}$$

är absolutkonvergent så säger vi att X är *integrerbar*. Om X är integrerbar så skriver vi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}). \tag{6.2}$$

Talet $\mathbb{E}(X)$ kallas för *väntevärdet för X*.

Varför blandar vi in absolutkonvergens här? Jo, vi vill ju inte att vi ska få olika väntevärden om vi räknar upp elementen i Ω på olika sätt. Detta blir dock inget problem om vi kräver att den oändliga summan ska vara absolutkonvergent, för som Sats 5.3.5 visar så blir värdet detsamma oavsett ordning på termerna i detta fall.

Anmärkning 6.1.4. För enkelhetens skull säger vi även att en stokastisk variabel X på ett ändligt utfallsrum är *integrerbar*, så hädanefter betyder alltså att X är en integrerbar stokastisk variabel antingen att utfallsrummet är ändligt, eller att utfallsrummet är oändligt och att den oändliga summan (6.1) är absolutkonvergent. Observera att den ändliga summan i Definition 6.1.1 faktiskt kan skrivas just som (6.2). Alltså gäller för alla integrerbara stokastiska variabler X på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathbb{P})$, oavsett om Ω är ändligt eller ej, att

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Exempel 6.1.5. Låt $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Definiera ett sannolikhetsmått $\mathbb{P}$ på Ω som uppfyller $\mathbb{P}(\{n\}) = 1/2^n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vi vet sedan tidigare att $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$ så denna definition ger verkligen ett sannolikhetsmått. Definiera vidare en stokastisk variabel X på Ω genom

ω	$X(\omega)$
1	0
2	-1
3	1
4	-2
5	2
6	-3
$\vdots$	$\vdots$

Det går att räkna ut att

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} + 3 \cdot \frac{1}{64} \cdots = \frac{2}{3}.$$

Därmed är summan

$$0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} - 3 \cdot \frac{1}{64} + \cdots$$

absolutkonvergent. Det betyder alltså att X är integrerbar, och att vi kan bestämma väntevärdet för X. Väntevärdet visar sig efter lite räkningar vara

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= X(1)\mathbb{P}(\{1\}) + X(2)\mathbb{P}(\{2\}) + X(3)\mathbb{P}(\{3\}) + \cdots \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} - 3 \cdot \frac{1}{64} + \cdots \\ &= -\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Ett sätt att tolka detta exempel på är följande: Tänk dig att du och en kompis spelar ett spel där ni singlar slant. Du börjar och ni singlar slant tills någon får krona. För varje slantsingling måste man lägga ett guldmynt i potten, och den som först får krona vinner potten. Utfallen $1, 2, 3, \ldots$ tolkas som antalet slantsinglingar som krävs innan någon får krona, och den stokastiska variabeln X beskriver hur mycket du vinner på spelet, enligt tabellen ovan. Exempelvis vinner du ju två guldmynt om krona kommer upp efter fem slantsinglingar, då har du singlat slant tre gånger, och din kompis två gånger. Det är också du som får krona först i detta fall, och därmed vinner. Detta skrivs $X(5) = 2$. Men om krona kommer upp först efter sex slantsinglingar så är det ju din kompis som vinner, och du förlorar då de tre guldmynt du lagt i potten. Det senare betyder att $X(6) = -3$.

Det visar sig alltså att $\mathbb{E}(X) = -2/9$, vilket betyder att detta inte är något bra spel för dig; du kan nämligen förvänta dig att i snitt förlora 2/9 guldmynt på spelet. Men spelet är desto bättre för din kamrat. ▲

6.2 Grundläggande egenskaper

Sats 6.2.1. *Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X en integrerbar stokastisk variabel på Ω. Låt*

$$V = \{x \in \mathbb{R} : X(\omega) = x \text{ för något } \omega \in \Omega\}.$$

Då är mängden V uppräknelig och

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in V} x \cdot p_X(x).$$

Bevis. Låt oss först visa att mängden V är uppräknelig. Eftersom Ω är uppräknelig kan vi skriva $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots\}$, vilket ger att $V = \{X(\omega_0), X(\omega_1), \ldots\}$. Vi definierar $x_i = X(\omega_i)$ för $i = 0, 1, 2, \ldots$, vilket ger en uppräkning av V som

$$V = \{x_0, x_1, \ldots, \}.$$

Kom ihåg att det inte spelar någon roll hur många gånger vi upprepar oss när vi räknar upp elementen i mängden. Låt oss nu definiera

$$\Omega_{x_i} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\},$$

det vill säga mängden av alla element i Ω för vilka den stokastiska variabeln X antar värdet x_i. Notera att

$$\Omega = \Omega_{x_0} \cup \Omega_{x_1} \cup \Omega_{x_2} \cup \cdots$$

och att

$$\Omega_{x_i} \cap \Omega_{x_j} = \varnothing \quad \text{så snart } i \neq j.$$

Vi påminner oss om definitionen av väntevärde:

$$\mathbb{E}(X) = X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \cdots = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Eftersom X är integrerbar så får vi summera termerna i väntevärdet i vilken ordning vi vill. Vi väljer att gruppera termerna i grupper av ω, för vilka X

antar samma värde; med andra ord grupperar vi termerna efter mängderna $\Omega_{x_0}, \Omega_{x_1}, \ldots$. Alltså

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega_{x_0}} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega_{x_1}} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \cdots$$

Att vi får dela upp en absolutkontinuerlig summa på detta sätt följer från ekvation (5.9). Vi vet, från definitionen av Ω_{x_i}, att $X(\omega) = x_i$ för alla $\omega \in \Omega_{x_i}$. Vi kan därför skriva

$$\mathbb{E}(X) = x_0 \sum_{\omega \in \Omega_{x_0}} \mathbb{P}(\{\omega\}) + x_1 \sum_{\omega \in \Omega_{x_1}} \mathbb{P}(\{\omega\}) + \cdots$$

Notera att

$$\sum_{\omega \in \Omega_{x_i}} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\Omega_{x_i}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x_i\}) = p_X(x_i),$$

vilket slutligen ger oss att

$$\mathbb{E}(X) = x_0 \cdot p_X(x_0) + x_1 \cdot p_X(x_1) + \cdots = \sum_{x \in V} x \cdot p_X(x). \qquad \square$$

Poängen med denna sats är att det räcker att känna till sannolikhetsfunktionen p_X för en stokastisk variabel X för att kunna beräkna väntevärdet $\mathbb{E}(X)$.

Exempel 6.2.2. Låt X vara en för-första-gången-fördelad stokastisk variabel med parameter $p = 1/2$ på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathbb{P})$. Vi vet då från Avsnitt 4.4 att

$$p_X(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{för } k = 1, 2, 3, \ldots$$

och därmed kan vi med hjälp av Sats 6.2.1 bestämma väntevärdet till

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

eftersom $\{x \in \mathbb{R} \,:\, X(\omega) = x \text{ för något } \omega \in \Omega\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. ▲

Sats 6.2.3. *Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X och Y vara integrerbara stokastiska variabler på Ω. Om X och Y är likafördelade så gäller*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y).$$

Bevis. Att X och Y är likafördelade betyder enligt Definition 4.2.6 att $p_X(x) = p_Y(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Låt

$$V_X = \{x \in \mathbb{R} \,:\, X(\omega) = x \text{ för något } \omega \in \Omega\}$$

och

$$V_Y = \{x \in \mathbb{R} \,:\, Y(\omega) = x \text{ för något } \omega \in \Omega\}.$$

Enligt Sats 6.2.1 gäller

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in V_X} x \cdot p_X(x) \quad \text{och} \quad \mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in V_Y} x \cdot p_Y(x).$$

Låt

$$W_X = \{x \in V_X \,:\, p_X(x) \neq 0\} \quad \text{och} \quad N_X = \{x \in V_X \,:\, p_X(x) = 0\}.$$

Notera att $V_X = W_X \cup N_X$ och att $W_X \cap N_X = \varnothing$. Alltså har vi att

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in V_X} x \cdot p_X(x) \\
&= \sum_{x \in W_X} x \cdot p_X(x) + \sum_{x \in N_X} x \cdot p_X(x) \\
&= \sum_{x \in W_X} x \cdot p_X(x) + 0 \\
&= \sum_{x \in W_X} x \cdot p_X(x),
\end{aligned}$$

och på samma sätt att

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in W_Y} x \cdot p_Y(x)$$

där

$$W_Y = \{x \in V_Y \,:\, p_Y(x) \neq 0\}.$$

Låt oss visa att $W_X = W_Y$. Till att börja med, tag $x \in W_X$. Då gäller $x \in V_X$ och $p_X(x) \neq 0$. Men eftersom $p_X(x) = p_Y(x)$ så måste även $p_Y(x) \neq 0$. Det senare betyder per definition att $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = x\}) \neq 0$, och därmed följer $\{\omega \in \Omega \,:\, Y(\omega) = x\} \neq \varnothing$. Alltså finns $\omega \in \Omega$ sådant att $Y(\omega) = x$. Detta visar att $x \in V_Y$, vilket tillsammans med $p_Y(x) \neq 0$ ger oss att $x \in W_Y$. Eftersom $x \in W_X$ var godtyckligt betyder detta att $W_X \subseteq W_Y$. Att visa att $W_Y \subseteq W_X$ görs på samma sätt, och därmed följer $W_X = W_Y$.

Nu får vi att

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in W_X} x \cdot p_X(x) \\
&= \sum_{x \in W_X} x \cdot p_Y(x) \\
&= \sum_{x \in W_Y} x \cdot p_Y(x) \\
&= \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

□

Sats 6.2.4. *Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X och Y vara integrerbara oberoende stokastiska variabler på Ω. Då är den stokastiska variabeln XY integrerbar och*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Bevis. Vi inför följande notation för värdemängderna för de tre stokastiska variablerna X, Y och $Z = XY$

$$\begin{aligned}
V_X &= \{X(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\} \\
V_Y &= \{Y(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\} \\
V_Z &= \{X(\omega)Y(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\},
\end{aligned}$$

och låter $x_1, x_2, \ldots$ vara en uppräkning av V_X och $y_1, y_2, \ldots$ en uppräkning av V_Y. Vi ska nu visa att

$$z_1 p_Z(z_1) + z_2 p_Z(z_2) + \cdots = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

för varje uppräkning $z_1, z_2, \ldots$ av V_Z. Detta visar att XY är integrerbar och att $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Från Sats 6.2.1 får vi att

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \left(\sum_{x \in V_X} x p_X(x) \right) \left(\sum_{y \in V_Y} y p_Y(y) \right).$$

Eftersom båda summorna är absolutkonvergenta, så kan vi enligt (5.10) skriva produkten på följande sätt:

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \sum_{(i,j) \in I} x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j),$$

där $I = \{(i,j) \,:\, i,j = 1,2,\ldots\}$. Om vi låter $I_k = \{(i,j) \in I \,:\, x_i y_j = z_k\}$ för $k = 1, 2, \ldots$, så får vi en uppdelning $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots$ där $I_k \cap I_l = \varnothing$ då $k \neq l$. Från (5.9) får vi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \sum_{(i,j) \in I_1} x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j) + \sum_{(i,j) \in I_2} x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j) + \cdots \\
&= z_1 \sum_{(i,j) \in I_1} p_X(x_i) p_Y(y_j) + z_2 \sum_{(i,j) \in I_2} p_X(x_i) p_Y(y_j) + \cdots.
\end{aligned}$$

Då X och Y antas vara oberoende, så följer det från Övning 4.3 att

$$\begin{aligned}
p_X(x_i) p_Y(y_j) &= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x_i\}\big)\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \,:\, Y(\omega) = y_j\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x_i \text{ och } Y(\omega) = y_j\}\big).
\end{aligned}$$

Låt $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots$ vara en uppräkning av elementen i I_k. Då gäller det att

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega \,:& X(\omega) = x_{i_1} \text{ och } Y(\omega) = y_{j_1}\} \\
&\cup \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x_{i_2} \text{ och } Y(\omega) = y_{j_2}\} \cup \cdots \\
&= \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega)Y(\omega) = z_k\},
\end{aligned}$$

eftersom mängden I_k består av just de (i,j) sådana att $x_i y_j = z_k$. Därav följer det att

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in I_k} & \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x_i \text{ och } Y(\omega) = y_j\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega)Y(\omega) = z_k\}\big) \\
&= p_Z(z_k).
\end{aligned}$$

Alltså har vi visat att

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = z_1 p_Z(z_1) + z_2 p_Z(z_2) + \cdots ,$$

för varje uppräkning $z_1, z_2, \ldots$ av V_Z. $\square$

Det är viktigt att notera att de stokastiska variablerna X och Y måste vara oberoende för att satsen ska gälla.

Övningar

Övning 6.1. Låt X och Y vara integrerbara stokastiska variabler på ett sannolikhetrum $(\Omega, \mathbb{P})$. Antag att $X + Y$ är integrerbar och visa att

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + E(Y).$$

Här kräver vi alltså inte att de stokastiska variablerna är oberoende.
Överkurs: Visa att $X + Y$ alltid är integrerbar då X och Y är integrerbara.

Övning 6.2. Låt X vara en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathbb{P})$ och definiera X genom $X(\omega) = a$ för alla $\omega \in \Omega$. Visa att X är integrerbar.

Övning 6.3. Låt X vara en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathbb{P})$ och definiera X genom $X(\omega) = a$ för alla $\omega \in \Omega$. Beräkna $\mathbb{E}(X)$.

Övning 6.4. Antag att du kastar en tärning 10 gånger. Vi definierar, precis som i Exempel 4.4.1, den stokastiska variabeln X till att vara den första gången en sexa kommer upp. Om ingen sexa har kommit upp efter 10 kast, definierar vi X till att vara 0. Beräkna väntevärdet för X.

7 Stora talens lag

7.1 Introduktion och formulering av satsen

Då vi försöker skapa oss en sannolikhetsmodell av ett verkligt förlopp så måste vi ha någon vägledning när det gäller att välja sannolikhetsmåttet. Hur gör vi detta? Antingen upprepar vi försöket och noterar de relativa frekvenserna av utfallen, varefter vi definierar sannolikhetsmåttet efter dessa, eller så argumenterar vi för att något annat sannolikhetsmått än det valda skulle få absurda konsekvenser. Låt oss argumentera för att vi ska välja sannolikheten 1/2 för händelsen att krona kommer upp då vi singlar en slant. Enligt den första metoden så singlar vi slanten 1000 gånger och antecknar hur många kronor som kommer upp. Därefter delar vi detta antal med 1000 och definierar sannolikheten för krona till att vara detta tal. Av många sådana försök genom tiderna så vet vi att ju längre vi fortsätter, desto närmare 1/2 kommer vi. Istället för att genomföra dessa tidskrävande (men ytterligt rättvisande) experiment, så kan vi argumentera på följande sätt: Om vi singlar en slant som är helt symmetrisk så borde det vara lika stor sannolikhet att den ena sidan kommer upp som den andra. I annat fall så finns det någon ”mekanism” i naturen som gör att en av sidorna på det helt symmetriska myntet föredras. Detta går tvärs emot vår intuition om hur världen fungerar och vi utesluter detta fall, om vi inte tror att vi är ett nytt naturfenomen på spåret.

Låt oss nu vända på problemet. Låt utfallsrummet Ω bestå av elementen $\omega_1 =$”krona” och $\omega_2 =$”klave”, och definiera $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1/2$. Vi simulerar n försök genom att definiera de stokastiska variablerna $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med $X_i(\omega_1) = 1$ och $X_i(\omega_2) = -1$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. Det följer direkt att $\mathbb{E}(X_i) = 0$ för alla i. Vi definierar slutligen den stokastiska variabeln Y_n till att vara medelvärdet av de övriga variablerna

$$Y_n = \frac{1}{n}\Big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\Big).$$

Vår intuition säger oss att det borde vara störst sannolikhet att Y_n antar värdet 0, vilket motsvarar att vi får lika många kronor som klavar; det var ju trots allt på detta sätt vi kom fram till sannolikheten 1/2 för krona och klave. Vore det inte på detta vis, så skulle vi förmodligen tycka att det är något fel på vår teori. Detta är dock inte uppenbart och *Stora talens lag* uttrycker denna förmodan på ett mer precist sätt.

Sats 7.1.1. *Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och lika fördelade stokastiska variabler, där $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ för alla i. Sätt*

$$Y_n = \frac{1}{n}\Big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\Big).$$

Då gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,:\, \mu - \varepsilon < Y_n(\omega) < \mu + \varepsilon\}) = 1,$$

för alla $\varepsilon > 0$.

I fallet då vi singlar en slant kan vi uttrycka det såhär: Oavsett hur litet intervall kring 0 vi väljer, till exempel $[10^{-9}, 10^{-9}]$, så kan vi, genom att upprepa försöket tillräckligt många gånger, se till att medelvärdet hamnar i detta intervall med stor sannolikhet. Eller, uttryckt med ord: Ju fler oberoende försök vi gör, desto närmare kommer vi fallet då (relativt sett) hälften av försöken ger krona och hälften klave.

7.2 Bevis av Stora talens lag

För att visa Stora talens lag, så använder vi oss av två olikheter: Markovs olikhet och Tjebysjovs olikhet. Vi bevisar först Markovs olikhet och använder oss sedan av den för att bevisa Tjebysjovs olikhet. Slutligen använder vi Tjebysjovs olikhet för att bevisa Stora talens lag.

Sats 7.2.1 (Markovs olikhet)**.** *Låt* $(\Omega, \mathbb{P})$ *vara ett sannolikhetsrum och låt* Y *vara en integrerbar stokastisk variabel på* $(\Omega, \mathbb{P})$ *sådan att* $Y(\omega) \geqslant 0$ *för alla* $\omega \in \Omega$. *Då gäller det att*

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \,:\, Y(\omega) \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}(Y)$$

för alla $a > 0$.

Bevis. Låt oss definiera mängden V, av reella tal, som

$$V = \{Y(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\},$$

det vill säga V består av alla möjliga värden som Y kan anta. Från Sats 6.2.1 och Sats 5.3.5 får vi att

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in V} x p_Y(x) = \sum_{x \in \{y \in V \,:\, y < a\}} x p_Y(x) + \sum_{x \in \{y \in V \,:\, y \geqslant a\}} x p_Y(x),$$

där Sats 5.3.5 garanterar att vi får dela upp summan i två delar. Då vi har antagit att $Y(\omega)$ är positiv så är $x \geqslant 0$ för alla $x \in V$, och av detta följer att båda termerna i summan ovan är positiva. Därför kan vi ta med endast den andra termen och få olikheten

$$\mathbb{E}(Y) \geqslant \sum_{x \in \{y \in V \,:\, y \geqslant a\}} x p_Y(x)$$

Eftersom $x \geqslant a$ i denna summa så kan vi byta ut x mot a i olikheten, vilket ger oss

$$\mathbb{E}(Y) \geqslant a \sum_{x \in \{y \in V \,:\, y \geqslant a\}} p_Y(x) = a\mathbb{P}\big(\{\omega \,:\, Y(\omega) \geqslant a\}\big).$$

Dividerar vi med a, som vi har antagit är skild från 0, så erhåller vi

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \,:\, Y(\omega) \geqslant a\}\big) \leqslant \frac{1}{a}\mathbb{E}(Y).$$

□

Sats 7.2.2 (Tjebysjovs olikhet)**.** *Låt* $(\Omega, \mathbb{P})$ *vara ett sannolikhetsrum och låt* X *vara en integrerbar stokastisk variabel på* $(\Omega, \mathbb{P})$ *med* $\mathbb{E}(X) = \mu$*. Definiera* $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\big((X-\mu)^2\big)}$*. För alla* $k > 0$ *gäller det att*

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mu| \geqslant k\sigma\}\big) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Bevis. Vi noterar först identiteten

$$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mu| \geqslant k\sigma\} = \{\omega \in \Omega : (X(\omega) - \mu)^2 \geqslant k^2\sigma^2\},$$

vilken gäller eftersom både k och σ är positiva. Nu använder vi oss av Markovs olikhet med $Y = (X-\mu)^2$ och $a = k^2\sigma^2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mu| \geqslant k\sigma\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : (X(\omega) - \mu)^2 \geqslant k^2\sigma^2\}\big)\\ &\leqslant \frac{1}{k^2\sigma^2}\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

Nu påminner vi oss om definitionen av σ och får att

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sigma^2,$$

vilket ger oss

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mu| \geqslant k\sigma\}\big) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Detta avslutar beviset av Tjebysjovs olikhet. □

Anmärkning 7.2.3. Tjebysjovs olikhet är intressant i sig, och inte bara ett hjälpmedel för att bevisa Stora talens lag. Olikheten säger att sannolikheten att den stokastiska variabeln X antar ett värde x, blir mindre ju längre bort från väntevärdet x ligger. Avståndet mäts i enheter av σ, vilket vanligen kallas för *standardavvikelsen* för X. Detta stämmer bra med vår intuitiva uppfattning om väntevärdet som det värde man förväntar sig att den stokastiska variabeln antar.

Med hjälp av Tjebysjovs olikhet kan vi relativt enkelt bevisa Stora talens lag.

Bevis av Sats 7.1.1. Vi definierar

$$\sigma_i = \sqrt{\mathbb{E}\left((X_i - \mu)^2\right)}$$

för $i = 1, 2, \ldots, n$ och

$$\tau = \sqrt{\mathbb{E}\left((Y_n - \mu)^2\right)}.$$

Eftersom X_i är likafördelade så gäller det, från Sats 6.2.3, att $\sigma_i = \sigma_j$ för alla i och j. Vi kallar detta gemensamma värde för σ. Vi visar, i Sats 7.2.4, att vi kan uttrycka τ med hjälp av σ; nämligen, $\tau = \sigma/\sqrt{n}$.

Nu bevisar vi satsen genom att använda Tjebysjovs olikhet, där vi väljer den stokastiska variabeln X till att vara Y_n. Eftersom $\sqrt{\mathbb{E}\big((Y_n-\mu)^2\big)} = \sigma/\sqrt{n}$, får vi från Tjebysjovs olikhet att

$$\mathbb{P}\Big(\ \{\omega \in \Omega\ :\ |Y_n(\omega)-\mu| \geqslant k\sigma/\sqrt{n}\}\ \Big) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Eftersom detta gäller för godtyckligt $k > 0$, så kan vi välja $k = \varepsilon\sqrt{n}/\sigma$, vilket ger oss

$$\mathbb{P}\Big(\ \{\omega \in \Omega\ :\ |Y_n(\omega)-\mu| \geqslant \varepsilon\}\ \Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Då $\mathbb{P}(A)$ alltid är icke negativ (se Definition 2.2.4) erhåller vi, genom att ta gränsvärdet då $n \to \infty$ på båda sidor, att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\ \{\omega \in \Omega\ :\ |Y_n(\omega)-\mu| \geqslant \varepsilon\}\ \Big) = 0,$$

vilket ger att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\ \{\omega \in \Omega\ :\ |Y_n(\omega)-\mu| < \varepsilon\}\ \Big) = 1.$$

Detta kan vi skriva om på formen

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\ \{\omega \in \Omega\ :\ \mu-\varepsilon < Y_n(\omega) < \mu+\varepsilon\}\ \Big) = 1,$$

som är Stora talens lag. □

Sats 7.2.4. *Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara lika fördelade oberoende stokastiska variabler med $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ för $i = 1, \ldots, n$ och definiera $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Då gäller det att*

$$\mathbb{E}\Big((Y_n-\mu)^2\Big) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big((X_i-\mu)^2\Big)$$

för $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bevis. Låt oss börja med att utveckla $\mathbb{E}\big((X_i-\mu)^2\big)$. Vi får, med hjälp av resultatet i Övning 6.1, att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big((X_i-\mu)^2\Big) &= \mathbb{E}\big(X_i^2+\mu^2-2X_i\mu\big) = \mathbb{E}\big(X_i^2\big)+\mu^2-2\mu\mathbb{E}(X_i)\\ &= \mathbb{E}\big(X_i^2\big)+\mu^2-2\mu^2 = \mathbb{E}\big(X_i^2\big)-\mu^2.\end{aligned} \tag{7.1}$$

Nu utvecklar vi $\mathbb{E}\big((Y_n-\mu)^2\big)$ på samma sätt:

$$\mathbb{E}\Big((Y_n-\mu)^2\Big) = \mathbb{E}\big(Y_n^2\big)+\mu^2-2\mu\mathbb{E}(Y_n)$$

Vi beräknar vidare $\mathbb{E}(Y_n)$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu.$$

Detta ger oss att

$$\mathbb{E}\Big((Y_n-\mu)^2\Big) = \mathbb{E}\big(Y_n^2\big) - \mu^2. \tag{7.2}$$

Det kvarstår nu att beräkna $\mathbb{E}\big(Y_n^2\big)$

$$\mathbb{E}\big(Y_n^2\big) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k^2\big) + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k+1}^{n}\mathbb{E}\big(X_kX_l\big).$$

Eftersom vi har antagit att X_k och X_l är oberoende, så får vi från Sats 6.2.3 att $\mathbb{E}(X_kX_l) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = \mu^2$, vilket ger att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(Y_n^2\big) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k^2\big) + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k+1}^{n}\mu^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k^2\big) + \frac{2\mu^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_k^2\big) - \frac{1}{n}\mu^2 + \mu^2.\end{aligned}$$

Att det är precis $n(n-1)/2$ termer i summan lämnas som en övning. Då $\mathbb{E}\big(X_k^2\big) = \mathbb{E}\big(X_i^2\big)$ för alla k, enligt Sats 6.2.3, så kan vi byta ut alla termer i den kvarvarande summan mot $\mathbb{E}\big(X_i^2\big)$:

$$\mathbb{E}\big(Y_n^2\big) = \frac{1}{n^2}n\mathbb{E}\big(X_i^2\big) - \frac{1}{n}\mu^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\Big(\mathbb{E}\big(X_i^2\big) - \mu^2\Big) + \mu^2.$$

Från (7.1) får vi således

$$\mathbb{E}\big(Y_n^2\big) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big((X_i-\mu)^2\Big) + \mu^2.$$

Slutligen erhåller vi från (7.2) att

$$\mathbb{E}\Big((Y_n-\mu)^2\Big) = \mathbb{E}\big(Y_n^2\big) - \mu^2 = \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big((X_i-\mu)^2\Big),$$

vilket visar påståendet i satsen. $\square$

Övningar

Övning 7.1. Låt oss återvända till den stokastiska variabeln i Exempel 4.2.9. Där kastades två tärningar och den stokastiska variabeln X gav summan av de värden som tärningarna visade. Definiera en ny stokastisk variabel Y genom $Y(\omega) = X(\omega)^2$ för alla $\omega \in \Omega$. Beräkna $\mathbb{E}(Y)$.

Övning 7.2. Definiera den stokastiska variabeln X som i Övning 7.1. Beräkna standardavvikelsen för X, d.v.s. beräkna

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\big((X - \mu)^2\big)},$$

där $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Övning 7.3. Antag att du kastar en sexsidig tärning där sannolikheten är lika stor för någon av sidorna att komma upp. Låt oss vidare tänka oss att du kastar tärningen många gånger och räknar ut medelvärdet från de sidor som kommer upp. Vad händer med medelvärdet då du kastar tärningen ett stort antal gånger?

Övning 7.4. Du befinner dig på en loppmarknad där du helt plötsligt hittar ett bord där det finns 20 exemplar av en skiva som du länge har letat efter. Försäljaren påpekar dock att hälften av skivorna är defekta, men han vet inte vilka. Hur många måste du minst köpa för att sannolikheten att du ska få tag i minst en fungerande skiva ska vara större än 90%?

A Extra träning i mängdlära och bevisföring

Här kommer fyra tips på hur man visar saker om mängder:

1. Visa att $x \in A$.

   Här ska man alltså visa att x uppfyller de villkor som definierar vilka element som tillhör mängd A. Om exempelvis $A = \{1, 2, 3\}$ är det uppenbart att $2 \in A$, men om $A = \{x : \text{villkor på } x\}$ så måste man visa att x uppfyller de nämnda villkoren. Om $A = B \cap C$ så måste man visa att $x \in B$ och $x \in C$, medan om $A = B \cup C$ så räcker det att visa att $x \in B$ eller $x \in C$ (eller båda).

2. Visa att $A \subseteq B$.

   Tag ett godtyckligt element $x \in A$. Använd nu definitionen för mängden A för att skriva ner vilka villkor som finns på x. Visa sedan att $x \in B$. Eftersom x var godtyckligt så betyder detta att alla $x \in A$ uppfyller $x \in B$, det vill säga $A \subseteq B$.

3. Visa att $A = B$.

   Vi visar först $A \subseteq B$ och sedan $B \subseteq A$. Då har vi visat att alla element i A ligger i B och att alla element i B ligger i A. Det följer då naturligtvis att $A = B$.

4. Visa att $A = \emptyset$.

   Minns att $\emptyset$ betecknar denna tomma mängden, det vill säga en mängd som inte innehåller några element alls. Det som ska visas är alltså att det inte kan finnas några element i A.

   Antag till att börja med att $x \in A$. Använd definitionen av A för att skriva ner vilka villkor som då ställs på x. Visa att dessa villkor är omöjliga (att de leder till en motsägelse). Alltså kan det inte vara så att $x \in A$, oavsett vilket x vi väljer. Alltså innehåller inte A några element.

Låt Ω vara en godtycklig mängd. Vi kommer att antaga att alla mängder $A, B, C, \ldots$ är delmängder till Ω. Låt oss göra följande definitioner:

1. $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
2. $A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$
3. $A \Delta B = \{x \in \Omega : x \text{ tillhör en av } A \text{ och } B \text{ men inte båda}\}$

Övning A.1. Visa att $A \setminus B \subseteq A \Delta B$.

Övning A.2. Visa att $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Övning A.3. Två mängder B och C sägs vara *disjunkta* om de inte har några gemensamma element. Visa att B och C är disjunkta om och endast om $B \cap C = \emptyset$.

Övning A.4. Visa att A och A^c är disjunkta.

Övning A.5. Visa att $\Omega = A \cup A^c$.

Övning A.6. Symbolen $n!$ definieras som $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ och kallas n-fakultet. Exempelvis har vi att $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ och $5! = 120$. Låt $A_n = \{kn : k = 1, 2, 3, \ldots\}$. Visa att $n! \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, för varje heltal $n \geqslant 1$, men att $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \emptyset$.

Övning A.7. Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ och $B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att $\mathbb{N} \setminus \{0\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots$.

Övning A.8. Visa att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

Lösningar

Övning A.1. Tag $x \in A \setminus B$. Det betyder att $x \in A$ och att $x \notin B$. Alltså tillhör x en av A och B, men inte båda, och därmed gäller $x \in A\Delta B$. Eftersom x var godtycklig betyder detta att $x \in A\Delta B$ för alla $x \in A \setminus B$, det vill säga att $A \setminus B \subseteq A\Delta B$.

Övning A.2. Tag $x \in A\Delta B$. Det betyder att x tillhör en av A och B men inte båda. Vi har två fall:

Till att börja med kan $x \in A$ och $x \notin B$. Då gäller per definition $x \in A \setminus B$. Eftersom $A \setminus B$ är en delmängd till $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ så gäller även $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Det andra fallet är att $x \in B$ och $x \notin A$, det vill säga att $x \in B \setminus A \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

I båda fallen får vi alltså att $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, och eftersom x var godtycklig så betyder detta att $A\Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Omvänt, tag $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Det betyder att $x \in A \setminus B$ eller $x \in B \setminus A$. I båda fallen tillhör x en av A och B men inte båda. Alltså gäller $x \in A\Delta B$. Eftersom x var godtycklig så följer det att $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A\Delta B$.

Nu har vi visat att $A\Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ och att $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A\Delta B$. Det betyder att $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Övning A.3. Antag att B och C är disjunkta. Antag att $x \in B \cap C$, det vill säga att $x \in B$ och $x \in C$. Men detta betyder att B och C har x som gemensamt element, vilket motsäger att B och C är disjunkta. Alltså måste $B \cap C = \emptyset$.

Omvänt, antag att $B \cap C = \emptyset$. Det betyder att det inte finns något element som tillhör både B och C. Alltså har B och C inga gemensamma element, det vill säga att B och C är disjunkta.

Nu har vi alltså visat två saker, dels att om B och C är disjunkta så gäller $B \cap C = \emptyset$, dels att om $B \cap C = \emptyset$ så är B och C disjunkta. Tillsammans betyder detta att B och C är disjunkta om och endast om $B \cap C = \emptyset$.

Övning A.4. Enligt föregående uppgift är det vi ska visa att $A \cap A^c = \emptyset$. Antag att $x \in A \cap A^c$. Det betyder att $x \in A$ och att $x \in A^c$. Det senare betyder per definition att $x \notin A$, vilket är en motsägelse. Alltså måste $A \cap A^c = \emptyset$.

Övning A.5. Tag $x \in \Omega$. Vi har två fall: $x \in A$ och $x \notin A$. I det förstа fallet gäller naturligtvis $x \in A \cup A^c$. I det andra fallet har vi per definition att $x \in A^c$, och därmed att $x \in A \cup A^c$. I båda fallen gäller alltså $x \in A \cup A^c$ och eftersom x var godtycklig så följer $\Omega \subseteq A \cup A^c$.

Omvänt, antag att $x \in A \cup A^c$. Vi vet att $A \subseteq \Omega$ och att $A^c \subseteq \Omega$. Alltså måste $x \in \Omega$. Detta visar att $A \cup A^c \subseteq \Omega$, och tillsammans med ovanstående får vi $\Omega = A \cup A^c$.

Övning A.6. Låt n vara ett heltal med $n \geqslant 1$. Tag ett heltal i med $1 \leqslant i \leqslant n$. Notera att $n! = ki$ där $k = 1 \cdot 2 \cdots (i-2) \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot (i+1) \cdots (n-1) \cdot n \geqslant 1$. Alltså gäller $n! \in A_i$, och eftersom i var godyckligt så gäller $n! \in A_i$ för alla $i = 1, 2, \ldots, n$, det vill säga $n! \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Nu, eftersom n var godtyckligt så gäller $n! \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$, för alla heltal $n \geqslant 1$.

Vidare, antag att $x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots$. Det betyder att $x \in A_n$ för alla heltal $n \geqslant 1$. I synnerhet gäller $x \in A_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, det vill säga x är ett positivt heltal. Låt $m = x + 1$. Då gäller $x < m < 2m < 3m < \cdots$, och i synnerhet $x \neq km$ för $k = 1, 2, \ldots$, så $x \notin A_m$. Men detta motsäger ju att $x \in A_n$ för alla heltal $n \geqslant 1$. Alltså gäller $A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \emptyset$.

Övning A.7. Tag $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Det betyder att $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ och att $x \notin \{0\}$, det vill säga att x är något av talen $1, 2, 3, \ldots$. I synnerhet gäller $x \in \{1, 2, \ldots, x\} = B_x$ och därmed $x \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots$. Eftersom x var godtycklig visar detta att $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \cdots$.

Omvänt, antag att $x \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots$. Det betyder att det finns ett heltal $n \geqslant 1$ så att $x \in B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. I synnerhet gäller $x \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ och $x \notin \{0\}$, det vill säga $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Detta visar att $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Övning A.8. Tag $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$. Det betyder att $x \in \Omega$ och $x \notin (A \cap C) \cup (B \cap C^c)$. Alltså har vi att $x \notin A \cap C$ och $x \notin B \cap C^c$. Det finns nu två möjligheter: $x \in C$ och $x \notin C$.

I det första fallet, det vill säga $x \in C$, måste $x \notin A$ eftersom om $x \in A$ så skulle $x \in A \cap C$ vilket är falskt. Alltså gäller $x \in A^c$, vilket tillsammans med $x \in C$ ger att $x \in A^c \cap C$ i detta fall. I synnerhet har vi att $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

I det andra fallet gäller $x \in C^c$ och då måste $x \in B^c$ eftersom om $x \in B$ så skulle $x \in B \cap C^c$ vilket är falskt. Alltså gäller $x \in B^c \cap C^c$, och i synnerhet $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

I båda fallen gäller alltså $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$, och eftersom x var godtycklig så visar detta att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c \subseteq (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

Omvänt, tag $x \in (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$. Då gäller $x \in A^c \cap C$ eller $x \in B^c \cap C^c$ (eller båda). Vi har alltså dessa två fall.

I det första fallet, det vill säga $x \in A^c \cap C$, har vi att $x \notin A$ och $x \notin C^c$. I synnerhet har vi att $x \notin A \cap C$ (eftersom $x \notin A$) och att $x \notin B \cap C^c$

(eftersom $x \notin C^c$). Alltså tillhör x varken $A \cap C$ eller $B \cap C^c$, vilket betyder att $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$.

I det andra fallet, det vill säga $x \in B^c \cap C^c$ har vi att $x \notin B$ och att $x \notin C$. Det följer att $x \notin A \cap C$ och att $x \notin B \cap C^c$. Alltså gäller $x \notin (A \cap C) \cup (B \cap C^c)$, vilket betyder att $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$.

I båda fallen har det alltså visats att $x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$, och eftersom x var godtycklig visar detta att $(A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c) \subseteq ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$.

Vi har alltså visat att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c \subseteq (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$ och att $(A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c) \subseteq ((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c$ och därmed att $((A \cap C) \cup (B \cap C^c))^c = (A^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)$.

B Uppräkning av utfall som motsvarar kast med tre tärningar

$\omega_{1} = (1,1,1)$	$\omega_{55} = (2,4,1)$	$\omega_{109} = (4,1,1)$	$\omega_{163} = (5,4,1)$
$\omega_{2} = (1,1,2)$	$\omega_{56} = (2,4,2)$	$\omega_{110} = (4,1,2)$	$\omega_{164} = (5,4,2)$
$\omega_{3} = (1,1,3)$	$\omega_{57} = (2,4,3)$	$\omega_{111} = (4,1,3)$	$\omega_{165} = (5,4,3)$
$\omega_{4} = (1,1,4)$	$\omega_{58} = (2,4,4)$	$\omega_{112} = (4,1,4)$	$\omega_{166} = (5,4,4)$
$\omega_{5} = (1,1,5)$	$\omega_{59} = (2,4,5)$	$\omega_{113} = (4,1,5)$	$\omega_{167} = (5,4,5)$
$\omega_{6} = (1,1,6)$	$\omega_{60} = (2,4,6)$	$\omega_{114} = (4,1,6)$	$\omega_{168} = (5,4,6)$
$\omega_{7} = (1,2,1)$	$\omega_{61} = (2,5,1)$	$\omega_{115} = (4,2,1)$	$\omega_{169} = (5,5,1)$
$\omega_{8} = (1,2,2)$	$\omega_{62} = (2,5,2)$	$\omega_{116} = (4,2,2)$	$\omega_{170} = (5,5,2)$
$\omega_{9} = (1,2,3)$	$\omega_{63} = (2,5,3)$	$\omega_{117} = (4,2,3)$	$\omega_{171} = (5,5,3)$
$\omega_{10} = (1,2,4)$	$\omega_{64} = (2,5,4)$	$\omega_{118} = (4,2,4)$	$\omega_{172} = (5,5,4)$
$\omega_{11} = (1,2,5)$	$\omega_{65} = (2,5,5)$	$\omega_{119} = (4,2,5)$	$\omega_{173} = (5,5,5)$
$\omega_{12} = (1,2,6)$	$\omega_{66} = (2,5,6)$	$\omega_{120} = (4,2,6)$	$\omega_{174} = (5,5,6)$
$\omega_{13} = (1,3,1)$	$\omega_{67} = (2,6,1)$	$\omega_{121} = (4,3,1)$	$\omega_{175} = (5,6,1)$
$\omega_{14} = (1,3,2)$	$\omega_{68} = (2,6,2)$	$\omega_{122} = (4,3,2)$	$\omega_{176} = (5,6,2)$
$\omega_{15} = (1,3,3)$	$\omega_{69} = (2,6,3)$	$\omega_{123} = (4,3,3)$	$\omega_{177} = (5,6,3)$
$\omega_{16} = (1,3,4)$	$\omega_{70} = (2,6,4)$	$\omega_{124} = (4,3,4)$	$\omega_{178} = (5,6,4)$
$\omega_{17} = (1,3,5)$	$\omega_{71} = (2,6,5)$	$\omega_{125} = (4,3,5)$	$\omega_{179} = (5,6,5)$
$\omega_{18} = (1,3,6)$	$\omega_{72} = (2,6,6)$	$\omega_{126} = (4,3,6)$	$\omega_{180} = (5,6,6)$
$\omega_{19} = (1,4,1)$	$\omega_{73} = (3,1,1)$	$\omega_{127} = (4,4,1)$	$\omega_{181} = (6,1,1)$
$\omega_{20} = (1,4,2)$	$\omega_{74} = (3,1,2)$	$\omega_{128} = (4,4,2)$	$\omega_{182} = (6,1,2)$
$\omega_{21} = (1,4,3)$	$\omega_{75} = (3,1,3)$	$\omega_{129} = (4,4,3)$	$\omega_{183} = (6,1,3)$
$\omega_{22} = (1,4,4)$	$\omega_{76} = (3,1,4)$	$\omega_{130} = (4,4,4)$	$\omega_{184} = (6,1,4)$
$\omega_{23} = (1,4,5)$	$\omega_{77} = (3,1,5)$	$\omega_{131} = (4,4,5)$	$\omega_{185} = (6,1,5)$
$\omega_{24} = (1,4,6)$	$\omega_{78} = (3,1,6)$	$\omega_{132} = (4,4,6)$	$\omega_{186} = (6,1,6)$
$\omega_{25} = (1,5,1)$	$\omega_{79} = (3,2,1)$	$\omega_{133} = (4,5,1)$	$\omega_{187} = (6,2,1)$
$\omega_{26} = (1,5,2)$	$\omega_{80} = (3,2,2)$	$\omega_{134} = (4,5,2)$	$\omega_{188} = (6,2,2)$
$\omega_{27} = (1,5,3)$	$\omega_{81} = (3,2,3)$	$\omega_{135} = (4,5,3)$	$\omega_{189} = (6,2,3)$
$\omega_{28} = (1,5,4)$	$\omega_{82} = (3,2,4)$	$\omega_{136} = (4,5,4)$	$\omega_{190} = (6,2,4)$
$\omega_{29} = (1,5,5)$	$\omega_{83} = (3,2,5)$	$\omega_{137} = (4,5,5)$	$\omega_{191} = (6,2,5)$
$\omega_{30} = (1,5,6)$	$\omega_{84} = (3,2,6)$	$\omega_{138} = (4,5,6)$	$\omega_{192} = (6,2,6)$
$\omega_{31} = (1,6,1)$	$\omega_{85} = (3,3,1)$	$\omega_{139} = (4,6,1)$	$\omega_{193} = (6,3,1)$
$\omega_{32} = (1,6,2)$	$\omega_{86} = (3,3,2)$	$\omega_{140} = (4,6,2)$	$\omega_{194} = (6,3,2)$
$\omega_{33} = (1,6,3)$	$\omega_{87} = (3,3,3)$	$\omega_{141} = (4,6,3)$	$\omega_{195} = (6,3,3)$
$\omega_{34} = (1,6,4)$	$\omega_{88} = (3,3,4)$	$\omega_{142} = (4,6,4)$	$\omega_{196} = (6,3,4)$
$\omega_{35} = (1,6,5)$	$\omega_{89} = (3,3,5)$	$\omega_{143} = (4,6,5)$	$\omega_{197} = (6,3,5)$
$\omega_{36} = (1,6,6)$	$\omega_{90} = (3,3,6)$	$\omega_{144} = (4,6,6)$	$\omega_{198} = (6,3,6)$
$\omega_{37} = (2,1,1)$	$\omega_{91} = (3,4,1)$	$\omega_{145} = (5,1,1)$	$\omega_{199} = (6,4,1)$
$\omega_{38} = (2,1,2)$	$\omega_{92} = (3,4,2)$	$\omega_{146} = (5,1,2)$	$\omega_{200} = (6,4,2)$
$\omega_{39} = (2,1,3)$	$\omega_{93} = (3,4,3)$	$\omega_{147} = (5,1,3)$	$\omega_{201} = (6,4,3)$
$\omega_{40} = (2,1,4)$	$\omega_{94} = (3,4,4)$	$\omega_{148} = (5,1,4)$	$\omega_{202} = (6,4,4)$
$\omega_{41} = (2,1,5)$	$\omega_{95} = (3,4,5)$	$\omega_{149} = (5,1,5)$	$\omega_{203} = (6,4,5)$
$\omega_{42} = (2,1,6)$	$\omega_{96} = (3,4,6)$	$\omega_{150} = (5,1,6)$	$\omega_{204} = (6,4,6)$
$\omega_{43} = (2,2,1)$	$\omega_{97} = (3,5,1)$	$\omega_{151} = (5,2,1)$	$\omega_{205} = (6,5,1)$
$\omega_{44} = (2,2,2)$	$\omega_{98} = (3,5,2)$	$\omega_{152} = (5,2,2)$	$\omega_{206} = (6,5,2)$
$\omega_{45} = (2,2,3)$	$\omega_{99} = (3,5,3)$	$\omega_{153} = (5,2,3)$	$\omega_{207} = (6,5,3)$
$\omega_{46} = (2,2,4)$	$\omega_{100} = (3,5,4)$	$\omega_{154} = (5,2,4)$	$\omega_{208} = (6,5,4)$
$\omega_{47} = (2,2,5)$	$\omega_{101} = (3,5,5)$	$\omega_{155} = (5,2,5)$	$\omega_{209} = (6,5,5)$
$\omega_{48} = (2,2,6)$	$\omega_{102} = (3,5,6)$	$\omega_{156} = (5,2,6)$	$\omega_{210} = (6,5,6)$
$\omega_{49} = (2,3,1)$	$\omega_{103} = (3,6,1)$	$\omega_{157} = (5,3,1)$	$\omega_{211} = (6,6,1)$
$\omega_{50} = (2,3,2)$	$\omega_{104} = (3,6,2)$	$\omega_{158} = (5,3,2)$	$\omega_{212} = (6,6,2)$
$\omega_{51} = (2,3,3)$	$\omega_{105} = (3,6,3)$	$\omega_{159} = (5,3,3)$	$\omega_{213} = (6,6,3)$
$\omega_{52} = (2,3,4)$	$\omega_{106} = (3,6,4)$	$\omega_{160} = (5,3,4)$	$\omega_{214} = (6,6,4)$
$\omega_{53} = (2,3,5)$	$\omega_{107} = (3,6,5)$	$\omega_{161} = (5,3,5)$	$\omega_{215} = (6,6,5)$
$\omega_{54} = (2,3,6)$	$\omega_{108} = (3,6,6)$	$\omega_{162} = (5,3,6)$	$\omega_{216} = (6,6,6)$

Lösningar till udda övningsuppgifter

Övning 1.1.

1. $B \cup C = A$.
2. $B \cap C = \emptyset$.
3. $D \cap C = \{4, 36\}$.
4. $\{x \in D : x \in B\} = D \cap B = \{1, 19, 101\}$.
5. $\{x \in A : x = y + 1$ för något $y \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.
6. $\{x + 1 : x \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.

Övning 1.3. Vi sätter $x_n = 2n + 1$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Detta ger oss att $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Enligt Definition 1.3.1 är X uppräknelig.

Övning 2.1. Vi påminner oss om Exempel 2.1.5, där vi beskriver utfallsrummet som alla triplar (a, b, c) med $1 \leqslant a, b, c \leqslant 6$, vilka representerar vad de tre tärningarna visar. Utfallsrummet Ω består alltså av $6^3 = 216$ element. Enligt uppgiftslydelsen är alla dessa utfall lika sannolika; alltså sätter vi $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/216$ för alla $\omega \in \Omega$, vilket, enligt Sats 2.2.10, definierar ett sannolikhetsmått.

Låt A vara händelsen att alla tärningarna visar samma siffra. Vi finner att

$$A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}.$$

Från detta beräknar vi $\mathbb{P}(A)$ som

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{(1,1,1)\}) + \mathbb{P}(\{(2,2,2)\}) + \mathbb{P}(\{(3,3,3)\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{(4,4,4)\}) + \mathbb{P}(\{(5,5,5)\}) + \mathbb{P}(\{(6,6,6)\}) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Övning 2.3. Först noterar vi att $A^c \cup A = \Omega$, eftersom A^c består av alla element i Ω förutom de som ligger i A. Då $(\Omega, \mathbb{P})$ är ett sannolikhetsrum och $A^c \cap A = \varnothing$, så följer det från Sats 2.2.6 att

$$\mathbb{P}(A^c \cup A) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A).$$

Eftersom $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, enligt definitionen av sannolikhetsrum, och $A^c \cup A = \Omega$ så följer det att

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A^c \cup A) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A),$$

vilket visar att $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Övning 3.1. Vi använder oss av samma beteckningar som i exemplet "Har kungen en syster?". Vi sätter utfallsrummet $\Omega = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\}$ och väljer $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/4$ för alla $\omega \in \Omega$. Vi låter A vara mängden av par där det första barnet är en pojke, och vi låter B vara mängden av par där det andra barnet är en flicka. Alltså

$$A = \{(p,p),(p,f)\} \qquad B = \{(p,f),(f,f)\}$$

vilket ger $A \cap B = \{(p,f)\}$. Vi söker sannolikheten att det andra barnet är en flicka, givet att det första barnet är en pojke, det vill säga $\mathbb{P}(B|A)$. Vi beräknar

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Övning 3.3. Vi låter utfallsrummet bestå av alla 36 möjliga utfall. Till exempel är $(2,6)$ ett utfall som betyder att tärningen på bordet visar 2 och tärningen under stolen visar 6. Vi antar vidare att alla utfall är lika sannolika, det vill säga vi sätter $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/36$ för alla $\omega \in \Omega$. Vi låter A vara mängden av kast där tärningen på bordet visar 6, och vi låter B vara mängden av kast där tärningen på golvet visar 6. Alltså

$$\begin{aligned} A &= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \\ B &= \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\} \end{aligned}$$

vilket ger $A \cap B = \{(6,6)\}$. Vi beräknar sannolikheten att B inträffar givet att A inträffar, alltså

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{6 \cdot \frac{1}{36}} = \frac{1}{6}.$$

Detta resultat kan erhållas utan att använda sig av betingad sannolikhet, genom att notera att tärningskasten antas vara oberoende. Detta betyder att resultatet av den ena tärningen inte påverkar resultatet av den andra. Alltså är sannolikheten $1/6$ att tärningen under bordet visar en sexa.

Övning 4.1. Sannolikheten p för att få två ettor är $1/36$. Den stokastiska variabeln X som definieras till att vara det antal kast fram till dess då två ettor uppkommer, är för-första-gången-fördelad. Vi beräknar

$$p_X(7) = (1 - 1/36)^{7-1}\frac{1}{36} = \frac{35^6}{36^7} \approx 0.023.$$

Övning 4.3. Vi inför beteckningarna

$$\begin{aligned} A_k &= \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = k\} \\ B_l &= \{\omega \in \Omega \,:\, Y(\omega) = l\}, \end{aligned}$$

vilket ger oss att

$$A_k \cap B_l = \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = k \text{ och } Y(\omega) = l\}.$$

Då vi har antagit att X och Y är oberoende så vet vi att

$$\mathbb{P}(A_k \cap B_l) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_l)$$

d.v.s. att

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = k \text{ och } Y(\omega) = l\}\right)\\ &\quad = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = k\}\right)\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \,:\, Y(\omega) = l\}\right).\end{aligned}$$

Övning 5.1. Antag att det finns $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$ sådana att $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$. Tag $\epsilon > 0$. Då finns ett heltal $N \geqslant 1$ sådant att

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

för alla $n \geqslant N$ och dessutom ett heltal $\tilde{N} \geqslant 1$ sådant att

$$\tilde{a} - \epsilon < a_n < \tilde{a} + \epsilon$$

för alla $n \geqslant \tilde{N}$. Låt M vara det största av N och $\tilde{N}$. För $n \geqslant M$ får vi då att $a - \epsilon < a_n < \tilde{a} + \epsilon$, vilket medför

$$a - 2\epsilon < \tilde{a},$$

och på samma sätt att

$$\tilde{a} < a + 2\epsilon.$$

Tillsammans ger detta att

$$a - 2\epsilon < \tilde{a} < a + 2\epsilon. \tag{†}$$

Antag nu att $a \neq \tilde{a}$. Då gäller antingen $a < \tilde{a}$ eller $\tilde{a} < a$. Antag till att börja med att $a < \tilde{a}$. Då kan vi låta $\delta = \tilde{a} - a$ och få $\delta > 0$. Men om vi då låter $\epsilon = \delta/2 > 0$ så får vi

$$a + 2\epsilon = a + \delta = \tilde{a},$$

vilket motsäger (†). På samma sätt får vi en motsägelse i fallet att $\tilde{a} < a$. Alltså kan inte $a \neq \tilde{a}$. Vi har alltså visat att $a = \tilde{a}$.

Övning 5.3. Tag $\epsilon > 0$ och låt $\tilde{S}_N = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_N$ för $N = 1, 2, 3, \ldots$. Att den oändliga summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerar till a medför att det finns ett heltal $M \geqslant 1$ sådant att

$$a - \frac{\epsilon}{c} < S_N < a + \frac{\epsilon}{c}$$

för varje $N \geqslant M$, där $S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$. Notera att $\tilde{S}_N = cS_N$ för varje N. Nu följer

$$ca - \epsilon = c \cdot \left(a - \frac{\epsilon}{c}\right) < c \cdot S_N = \tilde{S}_N$$

och

$$\tilde{S}_N = c \cdot S_N < c \cdot \left(a + \frac{\epsilon}{c}\right) = ca + \epsilon$$

vilket sammantaget betyder att

$$ca - \epsilon < \tilde{S}_N < ca + \epsilon$$

för varje $N \geqslant M$. Detta betyder att

$$\lim_{N \to \infty} \tilde{S}_N = ca,$$

vilket skulle visas.

Övning 6.1. Låt oss visa att $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ givet att X och Y är integrerbara. Vi har att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \big(X(\omega_1) + Y(\omega_1)\big)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \big(X(\omega_2) + Y(\omega_2)\big)\mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \cdots \\ &= X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + Y(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\} + X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\} + Y(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\} + \cdots .\end{aligned}$$

Eftersom summan är absolutkonvergent, så kan vi kasta om termerna för att erhålla

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + Y(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

Låt oss nu gå vidare till överkursen. För att visa att $Z = X + Y$ är integrerbar måste vi finna en uppräkning $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ av Ω sådan att

$$|Z(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |Z(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots \tag{$*$}$$

är konvergent. Då vi har antagit att X är integrerbar så finns det en uppräkning $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ sådan att

$$S_X = |X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots$$

är konvergent. Eftersom även Y är integrerbar, vilket innebär att vi kan summera elementen i den ordning som önskas, så vet vi att

$$S_Y = |Y(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |Y(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots$$

är konvergent. Vi påminner oss om att för två reella tal a och b så gäller det alltid att $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Detta kan vi använda oss av i summan $(*)$ för att erhålla

$$\begin{aligned}&|Z(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |Z(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots \\ &= |\big(X(\omega_1) + Y(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |\big(X(\omega_2) + Y(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots \\ &= |\big(X(\omega_1) + Y(\omega_1)\big)||\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |\big(X(\omega_2) + Y(\omega_2)\big)||\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots \\ &\leqslant \big(|X(\omega_1) + |Y(\omega_1)|\big)|\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + \big(|X(\omega_2) + |Y(\omega_2)|\big)|\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots \\ &= |X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |Y(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_1\})| + |Y(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_2\})| + \cdots \\ &= S_X + S_Y.\end{aligned}$$

Eftersom alla termer i $(*)$ är positiva och, enligt ovanstående beräkning, summan är mindre eller lika med ett ändligt tal, $S_X + S_Y$, så är summan konvergent. Detta visar att den stokastiska variabeln $X + Y$ är integrerbar.

Övning 6.3. Låt $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ vara en uppräkning av elementen i Ω. Från Definition 6.1.1 har vi att

$$\mathbb{E}(X) = X(\omega_1)\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + X(\omega_2)\mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \cdots + X(\omega_N)\mathbb{P}(\{\omega_N\}).$$

Eftersom $X(\omega) = a$ för alla ω så får vi

$$\mathbb{E}(X) = a\Big(\mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \cdots \mathbb{P}(\{\omega_N\})\Big) = a \cdot \mathbb{P}(\Omega) = a \cdot 1 = a.$$

Övning 7.1. Vi börjar med att beräkna $p_Y(x)$. Eftersom X endast kan anta värdena i mängden $\{2, 3, \ldots, 12\}$, så betyder det att Y endast kan anta värdena i mängden $A = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144\}$, d.v.s. kvadraten på talen i den föregående mängden. Vidare är, till exempel, sannolikheten för att Y antar värdet 49 lika med sannolikheten att X antar värdet 7. I allmänhet har vi alltså att

$$p_Y(k) = p_X(\sqrt{k})$$

för alla $k \in A$. Naturligtvis har vi att $p_Y(k) = 0$ då $k \notin A$. Nu beräknar vi väntevärdet för Y på vanligt sätt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 4 \cdot p_Y(4) + 9 \cdot p_Y(9) + \cdots + 144 \cdot p_Y(144) \\ &= 4 \cdot p_X(2) + 9 \cdot p_X(3) + \cdots + 144 \cdot p_X(12).\end{aligned}$$

I Exempel 4.2.9 har vi räknat ut dessa sannolikheter och vi får

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2010}{36} = \frac{335}{6}.$$

Övning 7.3. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara de stokastiska variabler som representerar n oberoende tärningskast och låt $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ vara medelvärdet av dessa kast. Väntevärdet för X_i beräknar vi som

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Stora talens lag säger att då antalet kast blir stort så är det högst sannolikt att medelvärdet ligger mycket nära 7/2.

Förslag till vidare läsning

[1] J. Arnlind, T. Ekholm, A. Enblom. *Reella tal – Matematiska Cirkeln.* `http://www.math.kth.se/cirkel/2005/`

[2] G. Blom, J. Enger, G. Englund, J. Grandell, L. Holst. *Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar.* Studentlitteratur, 2005.

[3] G. Blom, L. Holst, D. Sandell. *Snapshots from the world of probability.* Springer-Verlag, 1995.

[4] R. Durret. *Probability: theory and examples.* Second edition. Duxbury Press, 1996.

[5] T. Ekholm, N. Eriksen. *Analysens grunder – Matematiska Cirkeln.* `http://www.math.kth.se/cirkel/HT-01/ht01.html`

[6] R. Isaac. *The pleasures of probability.* Springer-Verlag, 1995.

[7] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Company, 1976.

Böckerna ovan, och många andra böcker, finns att låna på Matematikbiblioteket, Lindstedtsvägen 25 (bottenvåningen). Biblioteket är öppet för alla.

Sakregister