KTH Matematik

KTHs Matematiska Cirkel

Linjär Algebra och bioinformatik — Facit till udda uppgifter

Tomas Ekholm

Niklas Eriksen

Matematiska institutionen, 2003

Biologisk modell och grundläggande kombinatorik

Lösning 1.1. Vi letar rätt på g_0 och finner denna skriven med minustecken. Det innebär att vi ska läsa genomet i omvänd ordning, med teckenbyte av alla gener. Börjar vi med g_0 får vi $\pi = [g_0\ \ -g_1\ g_4\ \ -g_2\ \ -g_3]$.

Om vi skriver om detta π till id så måste vi även ändra τ på motsvarande sätt. Vi ska ändra $-g_1$ till g_1, g_4 till g_2, $-g_2$ till g_3 och $-g_3$ till g_4 i τ. Gör vi detta får vi $\tau_\pi = [g_0\ g_2\ \ -g_3\ \ -g_4\ \ -g_1]$.

Detta genom kan vi enkelt sortera genom att först vända de fyra sista generna, och sedan de tre sista. Då fås $[g_0\ g_1\ g_2\ \ -g_3\ \ -g_4]$. Vi vänder sedan de två sista generna en i taget, vilket ger ett sorterat genom. Man kontrollerar enkelt att vändningar på samma positioner i τ ger π.

Lösning 1.3. Här följer de tio första raderna (upp till $n = 9$) i Pascals triangel.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1
\end{array}
$$

Lösning 1.5. Vi nyttjar förstås induktion.

(a) Vi studerar först startvärdet. Då $n = 4$ har vi $\mathsf{VL} = 3^4 = 81$ och $\mathsf{HL} = 4^3 = 64$. Vi har att $\mathsf{VL} > \mathsf{HL}$.

(b) Antag att det för ett givet $n \geqslant 4$ gäller att $3^n > n^3$. Vi vill visa att $3^{n+1} > (n+1)^3$, vilket är detsamma som att visa att $3^{n+1} - (n+1)^3 > 0$. Vi försöker återföra problemet till vårt antagande som är att $3^n > n^3$. Det är viktigt att tänka på att det minsta värde som n kan anta är 4. Detta ger t.ex. att $2n^3 = 2n \cdot n^2 \geqslant 8n^2$.

$$
\begin{aligned}
3^{n+1} - (n+1)^3 &= 3 \cdot 3^n - (n+1)^3 > 3 \cdot n^3 - (n+1)^3 = \\
&= 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \geqslant 8n^2 - 3n^2 - 3n - 1 = \\
&= 5n^2 - 3n - 1 \geqslant 20n - 3n - 1 = 17n - 1 > 0.
\end{aligned}
$$

Vi har visat de två stegen i induktionsprincipen, vilket ger oss att $3^n > n^3$ för alla heltal $n \geqslant 4$.

Lösning 1.7. Vi använder induktion och måste därmed verifiera basfall och induktionssteg. Som basfall har vi $n = 0$. Då består summan av en term, $\binom{n}{0} = 1$, och på andra sidan har vi $2^0 = 1$. Basfallet är därmed visat.

Vi antar nu att likheten gäller för $n-1$, det vill säga att

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=2^{n-1}.$$

Vi vill visa att den då även gäller för n. Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}+0+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}+0\\&=2^{n-1}+2^{n-1}=2^{n}.\end{aligned}$$

Därmed har vi visar induktionssteget och är färdiga.

Lösning 1.9. Vi kan skapa ett genom som följer. Leta rätt på g_0. Välj vilken gen som ska följa g_0 och i vilken riktning den ska gå. Gör likadant för genen efter, och sedan den därefter, och så vidare. Antalet sätt att välja genen efter g_0 är $n-1$, eftersom vi väljer bland $n-1$ gener. Antalet alternativ för nästa är $n-2$, för den därefter $n-3$, etc. Dessutom har vi två alternativ för var och en av dessa gener. Detta ger sammanlagt

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot 2^{n-1}=(n-1)!2^{n-1}.$$

Kortaste avstånd mellan genom

Lösning 2.1. Vi har brytpunkter mellan alla par av granngener utom mellan $-g_4$ och $-g_3$ och mellan g_1 och g_2. Det blir alltså $6-2=4$ brytpunkter.

Om vi ritar upp brytpunktsgrafen får vi tre cykler, så det antalet vändningar som krävs är minst $6-3=3$. Ett sätt att sortera π med tre vändningar är följande. Vänd först alla gener utom g_0. Sedan räcker det att vända g_1 och g_2 tillsammans, samt g_5.

Det är intressant att se hur brytpunktsgrafen förändras när man gör dessa vändningar. Genom att experimentera litet kan man komma fram till en bra strategi för att hitta bra vändningar i brytpunktsgrafen.

Lösning 2.3. Om ett genom saknar minustecken så kommer vartannat hörn i brytpunktsgrafen att vara udda, och vartannat kommer att vara jämnt. Går vi runt i en cykel så är alltid vartannat hörn udda och vartannat jämnt. Det innebär att om vi vandrar runt i en cykel så kommer vi alltid vara medurs eller moturs om den tjocka kanten innan vi ska passera den, så alla cykler kommer att vara likriktade. Därmed kan vi inte öka antalet cykler med en vändning.

Lösning 2.5. Varje gång vi applicerar en vändning kan vi öka antalet cykler med 1. Det maximala antalet cykler som denna komponent kan ge upphov till är $n(\tau)$. Om vi börjar med $c(\tau)$ cykler klarar vi att sortera komponenten med $n(\tau)-c(\tau)$ vändningar.

Matriser

Lösning 3.1. Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ och $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$. Vi får

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= A(b_{ij}+c_{ij})_{i,j=1}^{m,p} \\
&= (a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \ldots + a_{im}(b_{mj}+c_{mj}))_{i,j=1}^{n,p} \\
&= (a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + \ldots + a_{im}b_{mj} + a_{im}c_{mj})_{i,j=1}^{n,p} \\
&= (a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{im}b_{mj})_{i,j=1}^{n,p} + (a_{i1}c_{1j} + \ldots + a_{im}c_{mj})_{i,j=1}^{n,p} \\
&= AB + AC.
\end{aligned}$$

Likheten $(A+B)C$ visas på liknande sätt.

Antag att

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_3)c_1 + (a_1b_2 + a_2b_4)c_3 & (a_1b_1 + a_2b_3)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_4)c_4 \\ (a_3b_1 + a_4b_3)c_1 + (a_3b_2 + a_4b_4)c_3 & (a_3b_1 + a_4b_3)c_2 + (a_3b_2 + a_4b_4)c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 + b_2c_3) + a_2(b_3c_1 + b_4c_3) & a_1(b_1c_2 + b_2c_4) + a_2(b_3c_2 + b_4c_4) \\ a_3(b_1c_1 + b_2c_3) + a_4(b_3c_1 + b_4c_3) & a_3(b_1c_2 + b_2c_4) + a_4(b_3c_2 + b_4c_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1c_1 + b_2c_3 & b_1c_2 + b_2c_4 \\ b_3c_1 + b_4c_3 & b_3c_2 + b_4c_4 \end{pmatrix} \\
&= A(BC).
\end{aligned}$$

Lösning 3.3. Vi har att

$$\begin{aligned}
&\|u\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, \\
&\|v\|^2 = 1^2 + (-4)^2 + (-3)^2 = 1 + 16 + 9 = 26, \\
&(u, v) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) = 2 - 12 + 3 = -7.
\end{aligned}$$

Lösning 3.5. Låt A vara en kvadratisk matris sådan att $A^k = 0$ för något k. Då gäller att

$$(E-A)\left(E + A + \ldots + A^{k-1}\right) = E - A + A - A^2 + \ldots + A^{k-1} - A^k = E.$$

Vi har även att

$$\left(E + A + \ldots + A^{k-1}\right)(E-A) = E.$$

Detta visar att

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

Baser och dimension

Lösning 4.1. Vi måste visa att om $u, v \in N(A)$ följer att $u+v, su \in N(A)$ för alla tal s. Att $u, v \in N(A)$ betyder att $Au = 0$ och $Av = 0$. Vi får att $A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$ och att $A(su) = sAu = s0 = 0$. Vi har visat att $N(A)$ är ett delrum.

För att visa att $V(A)$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$ antar vi att $u, v \in V(A)$ och att s är ett tal. Vi vet att det finns x, y sådana att $Ax = u$ och $Ay = v$. Studera nu $A(x+y) = Ax + Ay = u + v$ vilket ger att $u + v \in V(A)$ och $A(sx) = sAx = su$ vilket ger att $su \in V(A)$. Detta ger att $V(A)$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

Lösning 4.3. Ekvationen $su + tv + rw = 0$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} s \phantom{{}+5t} + r = 0 \\ -7s + 5t + r = 0 \\ 2s - 2t + r = 0 \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} s + r = 0 \\ 5t + 8r = 0 \\ -2t - r = 0 \end{cases}$$

och även med ekvationssystemet

$$\begin{cases} s + r = 0 \\ 5t + 8r = 0 \\ -11t = 0 \end{cases}$$

som har lösningen $s = t = r = 0$. Alltså är vektorerna u, v och w linjärt oberoende.

Lösning 4.5. Låt $v_1 = u_1$ och bestäm talet s så att $v_2 = u_2 + sv_1$ så att $(v_1, v_2) = 0$. Vi har att

$$v_1^T(u_2 + sv_1) = v_1^T u_2 + s\|v_1\|^2 = 0$$

ger att

$$s = -\frac{v_1^T u_2}{\|v_1\|^2} = -1$$

och därmed $v_2 = u_2 - u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$. Låt oss bestämma talen t och r så att vektorn $v_3 = u_3 + tv_1 + rv_2$ är ortogonal mot både v_1 och v_2. Vi får ekvationerna

$$\begin{cases} (v_1, v_3) = 0 \\ (v_2, v_3) = 0 \end{cases}.$$

Första ekvationen ger

$$(v_1, v_3) = v_1^T(u_3 + tv_1 + rv_2) = v_1^T u_3 + t\|v_1\|^2 = 0$$

vilket har lösningen

$$t = -\frac{v_1^T u_3}{\|v_1\|^2} = -1.$$

Andra ekvationen ger

$$(v_2, v_3) = v_2^T(u_3 + tv_1 + rv_2) = v_2^T u_3 + r\|v_2\|^2 = 0$$

vilket har lösningen

$$t = -\frac{v_2^T u_3}{\|v_2\|^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Detta ger att

$$v_3 = u_3 - v_1 - \frac{1}{2}v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Vektorerna

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

är en ortonormerade bas för delrummet U av $\mathbb{R}^4$.

Sannolikhet och Markovkedjor

Lösning 5.1. Vi beräknar deras övergångsmatriser upphöjt till tre för att se situationen efter tre spelomgångar. Vi får

$$P^3_{\text{Erik}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

och

$$P^3_{\text{Lisa}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Om vi börjar med två kronor (tredje tillståndet) multiplicerar vi från höger med vektorn $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Vi får då tredje kolonnen i respektive matris, vilket för Erik är $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ och för Lisa $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$. Sannolikheten för att ha fem kronor ges av värdet i vektorernas sista position och sannolikheten för noll kronor i första positionen. I bägge fall är sannolikheten högre för Lisa: för fem kronor $3/8$ mot $1/8$ och för noll kronor $1/2$ mot $1/4$. Lisa spelar alltså med en strategi som är riskablare än Eriks.

Lösning 5.3. Låt n vara 2. Då finns bara två genom, nämligen $[1\ 2]$ och $[1\ \ -2]$. Vi växlar alltså mellan dessa och har därmed noll brytpunkter efter jämnt antal vändningar och två brytpunkter efter udda antal vändningar. Detta kan även skrivas $\mathbb{E}_{\text{brp}}(2, t) = 1 - (-1)^t$.

Lösning 5.5. Eftersom vi alltid har samma tecken på generna har vi bara $n-1$ olika tillstånd. Vi kan välja förflyttning genom att finna tre segment och byta plats på som inte innehåller g_0. Om det första segmentet som inte innehåller g_0 har i gener och det andra har j gener, så kommer generna i det första att flyttas j positioner åt moturs och generna i det andra flyttas i positioner medurs. Vi måste ta reda på hur många sätt man kan dela in genomet i tre segment så att en gen flyttas ett antal positioner åt höger eller vänster.

Låt g_1 befinna sig på position m_k. Om g_1 ska ligga kvar måste det höra till samma segment som g_0, så alla tre positioner där segmenten startar måste ligga på samma sida om g_1. Antalet sätt att välja 3 element antingen bland de k positionerna från 1 till k eller bland de $n-k$ positionerna från $k+1$ till n ges av

$$\binom{k}{3} + \binom{n-k}{3}.$$

Om vi å andra sidan vill flytta g_1 i steg moturs ska det första segmentet utan g_0 starta mellan 1 och k och det andra ska starta och sluta mellan $k+1$ och n och vara i positioner långt. För det första segmentet finns k alternativ och för det andra finns $n-k-i$ alternativ. Sammantaget ges

$$k(n-k-i)$$

alternativ. På samma sätt ser vi att förflyttning i steg åt andra hållet kan ske på

$$(k-i)(n-k)$$

olika sätt.

Eftersom det finns $\binom{n}{3}$ förflyttningar ska matriserna med dessa tal delas med $\binom{n}{3}$ för att bli övergångsmatriser.

Determinanter

Lösning 6.1. Vi får att

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-b & a-b \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \\
&= a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \\
&= a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \\
&= a(a-b) \begin{vmatrix} a-b & a-b \\ b & a \end{vmatrix} \\
&= a(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} \\
&= a(a-b)^3.
\end{aligned}$$

Lösning 6.3.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
&= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\
&= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.
\end{aligned}$$

Egenvärden och egenvektorer

Lösning 7.1. Antag att u är en egenvektor till A med egenvärdet λ. Då följer att $A^2u = A(Au) = A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda\lambda u = \lambda^2 u$.

Lösning 7.3. Vi betraktar det tredje största heltalsegenvärdet, så länge det är möjligt och får talserien $4, 7, 11, 16$. Dessa tal verkar inte vara binomialkoefficienter, men drar vi bort ett från dessa får vi $3, 6, 10, 15$. Dessa känner vi igen som tredje diagonalen i Pascals triangel, vilken även givit de tidigare egenvärdena. Om vi håller noga reda på index finner vi att dessa egenvärden ges av formeln

$$\binom{n-2}{2} + 1.$$

Nästa serie egenvärden är $9, 13$. Det verkar svårt att se varifrån dessa tal kommer, men troligtvis borde några binomialkoefficienter ur tredje diagonalen ingå. Tidigare har vi haft $\binom{n}{2}$, $\binom{n-1}{2}$ och senast $\binom{n-2}{2}$, så det är väl dags för $\binom{n-3}{2}$. Om vi drar bort detta från talserien för vi $3, 3$. Vi gissar att formeln är

$$\binom{n-3}{2} + 3.$$

De tal vi adderat till binomialkoefficienterna är själva binomialkoefficienter ur samma diagonal. En rimlig gissning på en formel för samtliga heltalsegenvärden är

$$\binom{n-k}{3} + \binom{k}{3},$$

där k tillåts ta olika värden från noll och uppåt.

Diagonalisering

Lösning 8.1. Vi söker först egenvärdena till A. Karaktäristiska ekvationen blir

$$\det(A - \lambda E) = (7-\lambda)(13-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = 0.$$

Ekvationen har rötterna $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 15$. En egenvektor u_1 svarande till egenvärdet λ_1 är en vektor som uppfyller ekvationen $(A - 5E)u_1 = 0$. Vi kan ta vektorn $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T$. För λ_2 är u_2 en egenvektor om $(A - 15E)u_1 = 0$. Vi kan ta $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$. Bilda nu egenvektorer P_1 och P_2 av längd ett. Nämligen

$$P_1 = 5^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T \text{ och } P_2 = 5^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Ansätt

$$P = 5^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Lösning 8.3. Med bara två egenvärden för $n = 2$ får vi

$$\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t) = 2\left(1 - (v_1^2 \lambda_1^t + v_2^2 \lambda_2^t)\right).$$

Matrisen K_2 är lätt att beräkna. Vi hoppas fram och tillbaka mellan de två tillstånden, vilket beskrivs av

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristiska polynomet blir $\lambda^2 - 1$, som har nollställena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$. Egenvektorerna räknar man fram till $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, så i bägge fall får vi en halv som koefficient. Detta ger

$$\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t) = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^t\right)\right) = 1 - (-1)^t,$$

vilket är precis samma resultat som vi fick vid det tidigare tillfället.

Förväntat avstånd mellan genom

Lösning 9.1. Vi tar vår formel för $\mathbb{E}_{\text{vänd}}(n, b)$ och sätter in våra värden $n = 400$ och $b = 273$. Detta ger

$$\frac{\log\left(1 - \frac{273}{400(1-\frac{1}{2\cdot 400-2})}\right)}{\log\left(1 - \frac{2}{400}\right)} = \frac{\log\left(1 - \frac{273\cdot 798}{400\cdot 797}\right)}{\log\left(\frac{199}{200}\right)} = \frac{\log\left(\frac{127}{400} - \frac{273}{400\cdot 797}\right)}{\log\left(\frac{199}{200}\right)} \approx 229.$$

Det förväntade antalet förflyttningar är således 229.

Lösning 9.3. Med denna koefficient blir koefficienterna till de mindre egenvärdena noll, så det räcker att betrakta de tre största. Sätter vi in dessa i formeln så får vi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\text{appr2}}(n, t) &= n\left(1 - \frac{\frac{1}{2n-2}\binom{n}{2}^t + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n-2}\right)\binom{n-1}{2}^t + \frac{1}{4}\left(\binom{n-1}{2} - 2\right)^t}{\binom{n}{2}^t}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{2n-2} - \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n-2}\right)\binom{n-1}{2}^t + \frac{1}{4}\left(\binom{n-1}{2} - 2\right)^t}{\binom{n}{2}^t}\right).
\end{aligned}$$

Här finns t i två exponenter, så det verkar väldigt svårt att invertera.

Lösning 9.5. För $n = 2$ och $n = 3$ är minsta egenvärdet -1, vilket stämmer med vårt påstående. Vi ska nu använda detta som basfall i två induktionskedjor — en för jämna n och en för udda.

Vi har formeln $K_n = A_n + B_n + (n-2)I_n$. Vi vet att det minsta egenvärdet till B_n är samma som det minsta egenvärdet till K_{n-2}. Med hjälp av induktionsantagandet att vårt påstående stämmer för $n - 2$ får vi

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n-2}(K_n) &= \lambda_{2n-2}(A_n + B_n + (n-2)I - n) \\
&\geqslant \lambda_{2n-2}(A_n) + \lambda_{2n-2}(B_n) + \lambda_{2n-2}((n-2)I_n) \\
&\geqslant -(n-1) - \frac{n-2}{2} + (n-2) = -\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Induktionssteget gäller både för udda och jämna n, så därmed är vi klara.