



KTH Matematik

KTHs Matematiska Cirkel

LINJÄR ALGEBRA OCH BIOINFORMATIK

TOMAS EKHOLM

NIKLAS ERIKSEN

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK, 2003
FINANSIERAT AV MARIANNE OCH MARCUS WALLENBERGS STIFTELSE

Grekiska alfabetet

alfa	A	α	iota	I	ι	rho	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ	sigma	Σ	σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	my	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ε	ny	N	ν	fi	Φ	φ
zeta	Z	ζ	xi	Ξ	ξ	chi	X	χ
eta	H	η	omikron	O	ο	psi	Ψ	ψ
theta	Θ	θ	pi	Π	π	omega	Ω	ω

Innehåll

1	Biologisk modell och grundläggande kombinatorik	8
1.1	Enkel evolutionär biologi	8
1.2	Matematisk modell av genomet	9
1.3	Evolutionära avstånd	11
1.4	Induktion	12
1.5	Vändningar och binomialkoefficienter	13
1.6	Övningar	15
2	Kortaste avstånd mellan två genom	17
2.1	Brytpunkter	17
2.2	Grafteori	17
2.3	Brytpunktsgrafan	18
2.4	Sortera genom	18
2.5	Ett bättre avståndsmått	20
2.6	Övningar	21
3	Matriser	23
3.1	Matriser	23
3.2	Inverterbarhet	25
3.3	Transponering av matriser	27
3.4	Skalarprodukt och längd av vektorer	28
3.5	Övningar	28
4	Baser och dimension	30
4.1	Delrum	30
4.2	Ortonormerade baser	36
4.3	Övningar	37
5	Sannolikhet och Markovkedjor	39
5.1	Sannolikheter	39
5.2	Markovkedjor	40
5.3	Antalet brytpunkter efter t vändningar	42
5.4	Övningar	44

6	Determinanter	45
6.1	Definitionen	45
6.2	Egenskaper	49
6.3	Övningar	51
7	Egenvärden och egenvektorer	53
7.1	Egenvärden och egenvektorer	53
7.2	Beräkning av egenvärden	53
7.3	Egenvärden för våra övergångsmatriser	54
7.4	Övningar	56
8	Diagonalisering av matriser	57
8.1	Diagonalisering	57
8.2	Diagonalisering av matriser i vår beräkning	59
8.3	Övningar	62
9	Förväntat avstånd mellan genom	63
9.1	De största egenvärdena och deras egenvektorer	63
9.2	Beräkning av formel och dess invers	66
9.3	Övningar	67
10	Appendix: Algebrans Fundamentalsats	69
10.1	Komplexa och reella vektorrum	70
10.2	Skevsymmetriska matriser	71

Några ord på vägen

Detta kompendium är skapat för att användas som litteratur till KTHs MATEMATISKA CIRKEL under läsåret 2003–2004. Kompendiet består av nio avsnitt, samt ett inledande avsnitt. Kompendiet är inte tänkt att läsas på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju träffarna.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Övningsuppgifterna är fördelade i två kategorier. De med udda nummer har facit, och syftet med dessa är att eleverna ska kunna räkna dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. De med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa även dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av oss.

Vi bör också nämna att få av uppgifterna är helt enkla. Kika därför inte i facit efter några få minuter (om du inte löst uppgiften), utan prata först med kompisar eller försök litet till. Alla uppgifter ska gå att lösa med hjälp av informationen i detta kompendium.

Årets kompendium är baserat på en forskningsartikel av Niklas Eriksen, som den intresserade kan ladda hem och skriva ut från internet ¹. Artikeln innehåller inte presentationen av den linjära algebran, men borde efter genomförd kurs kunna vara begriplig.

KTHs Matematiska Cirkel finansieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Vi tackar professorn Dan Laksov och lektorn Roy Skelnes för deras givande kommentarer om denna skrift.

¹http://www.math.kth.se/~niklase/publ/wabi_appr_final.pdf

Några ord om Cirkeln

KTHs Matematiska Cirkel, i dagligt tal benämnd Cirkeln, startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga studier. Den kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet.

Till varje kurs produceras ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, liksom övriga uppgifter om KTHs Matematiska Cirkel, finns tillgängligt på

<http://www.math.kth.se/cirkel>

Sedan 2001 godkänns Cirkeln av Stockholms Stad som en 50-poängskurs eller som matematisk breddning. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning. Vi ska påpeka att föreläsningarna fortfarande är öppna för envar.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om KTHs Matematiska Cirkel och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygssättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

Godkänd: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Väl godkänd: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Mycket väl godkänd: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Det är också möjligt att skolorna samarbetar, så elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, september 2003

1 Biologisk modell och grundläggande kombinatorik

Vi skall i detta häfte ge ett exempel på en matematisk modell för en speciell typ av mutationer av genom och analysera denna modell matematiskt. I detta kapitel förklarar vi den bakom liggande genetiken och skapar utifrån detta vår förenklade matematiska modell. Vi tittar dessutom litet närmare på hur många sätt det finns att välja k objekt bland n möjliga, vilket beräknas med hjälp av induktion.

1.1 Enkel evolutionär biologi

Även om detta huvudsakligen är en matematisk skrift måste vi ändå kortfattat beskriva hur den verklighet ser ut som vi vill säga något om. Här följer därför en mycket kort beskrivning av vår arvs massa.

En individs **arvs massa** (eller **genom**, med betoning på andra stavelsen) är det som tillsammans med yttre faktorer bestämmer hur individen ser ut och fungerar. Arvs massan består av **DNA**, som är en förkortning av deoxyribonukleinsyra. DNAn är uppbyggd av **nukleotider**. Det finns fyra nukleotider: Adenin (A), Cytosin (C), Guanin (G) och Tymin (T). Dessa finns hopparade i långa par av strängar, A parat med T och C med G (se figur 1). Om man vet vad som finns i ena strängen vet man alltså även vad som finns i andra strängen. Ett sådant par av strängar kallas en **kromosom**. Människan har 46 kromosomer, men de flesta bakterier har bara en, som är cirkulär.

... TAATCAGGAT ...
... ATTAGTCCTA ...

Figur 1: En kort del av en kromosom.

Olika delar av kromosomerna fungerar som ritning för olika proteiner. Den del som kodar för ett protein kallas en **gen**. En bakterie har ofta runt 500 till 1000 gener och människan har åtminstone 30000 gener. Strängen av nukleotider som en gen är uppbyggd av har en början och ett slut. Varje gen har därför en **riktning**.

En **mutation** är en förändring av arvs massan. Det finns flera olika förändringar som kan ske. Vissa ändrar bara en nukleotid, vilket kan förändra en gen till det bättre eller det sämre. Andra mutationer ändrar ordningen på generna, men inte deras innehåll. Dessa mutationer har ofta mindre påverkan på individen, men troligtvis är de inte helt utan betydelse. Antalet mutationer som sker under en tidsperiod är ungefär proportionellt mot periodens längd, så om vi kan beräkna antalet mutationer och den genomsnittliga frekvensen för en mutation får vi reda på hur länge genomet har muterat.

Genom mutationer uppstår olika arter. Det kan exempelvis ske genom att en art delas i två populationer, som inte interagerar med varandra. De kommer

då att utvecklas oberoende och så småningom bilda olika arter.

1.2 Matematisk modell av genomet

Vi vill beskriva en matematisk modell för en speciell typ av mutationer. En sådan modell bör vara såpass förenklad att beräkningar är möjliga, men ändå ha kvar de viktigaste egenskaperna hos det vi studerar.

I vår modell struntar vi fullständigt i vilka nukleotider som bygger upp en gen. I olika arters genom finns varianter av samma gen, som alla skiljer sig litet på nukleotidnivå, men som skapar samma, eller liknande, proteiner. Genom att strunta i innehållet i generna kan vi se varje kromosom som en följd av gener.

Den kraftigaste förenklingen vi gör är att bara betrakta de mutationer som förändrar genernas ordning. Vi struntar därmed i all information vi kunnat få genom att betrakta mutationerna på nukleotidnivå. Fördelen med detta är att vi får en enklare modell, som vi klarar av att hantera generellt.

Ett begrepp som studerats mycket inom matematiken är **permutationer**. Man utgår då från en mängd av element, och varje sätt att ordna dessa, att skriva dem i en följd, är en permutation. Genomet är en följd av gener och kan därför ses som en permutation av dessa.

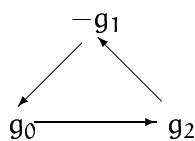
Här har vi gjort antagandet att ingen gen förekommer två gånger i samma genom. Det stämmer inte riktigt med verkligheten, men gör att våra beräkningar blir mycket lättare. Vi låter därför modellen ha denna begränsning och hoppas att det inte påverkar resultatet alltför mycket. Vi antar också att alla genom innehåller samma gener. Även detta är litet felaktigt, men det är nästan sant om genomen är någorlunda nära släkt. När vi vill jämföra två verkliga genom kastar vi bort de gener som antingen saknas eller förekommer dubbelt i något genom.

För att få samma utseende som bakteriella genom låter vi våra permutationer vara **circulära**, det vill säga att vi låter första elementet följa direkt efter sista elementet. Vi tar också tillvara den information vi har om genernas riktning genom att sätta ett minustecken framför de gener som är riktade i motsatt riktning.

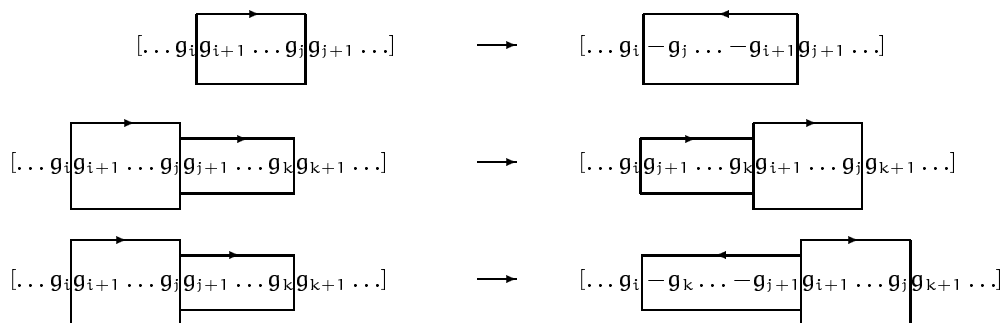
För att skriva ett genom använder vi notationen $g = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n]$, där g_i är elementen som svarar mot generna. Vi bör här tänka på att ett genom kan skrivas på flera olika sätt. Om vi vrider genomet, eller vänder det uppochner har vi fortfarande samma genom, och det måste gälla även när vi ser det som en permutation.

Exempel 1.1. Genomet i figur 2 kan skrivas som $[g_0 \ g_2 \ -g_1]$ eller $[g_2 \ -g_1 \ g_0]$ eller till och med $[-g_2 \ -g_0 \ g_1]$, om vi läser det baklänges. Vanligtvis skriver vi dock g_0 först. Detta sätt att skriva genomet kallar vi **normalform**. ▲

Den evolutionära process vi kommer att koncentrera oss på i detta kompendium kallas **vändning**. En vändning går till så att en följd av en eller flera



Figur 2: Genomet $[g_0 g_2 -g_1]$.



Figur 3: Definition av vändning, förflyttning och vänd förflyttning.

gener tas ut ur genomet och sätts in i omvänd ordning. Detta finns avbildat i figur 3. Där ges även exempel på två andra operationer som kan förekomma: en **förflyttning** lyfter ut ett segment av gener ur genomet och sätter in det någon annanstans och en **vänd förflyttning** lyfter ut ett segment och sätter in det vänt på ett annat ställe. Vi kommer dock att anta att det bara är vändningar som sker, och att alla vändningar är lika sannolika.

Det finns flera anledningar till denna begränsning. En är att det bland vissa bakterier troligen skett mest vändningar. En annan är att dessa har mycket bättre matematiska egenskaper än förflyttningar. Det finns inga motsvarigheter för förflyttningar till de resultat vi presenterar här.

Ett bra sätt att visualisera genomet är följande: Tänk dig genomet som pärlor på en ring av ståltråd, som är konstruerad på så sätt att vi kan utföra vändningar. Vi kallar de olika generna g_0, g_1, \dots, g_{n-1} . Eftersom g_0 följer efter g_{n-1} kallas vi den ibland för g_n . Tag nu tag i gen g_0 med vänster hand. Den högra handen kan nu utföra alla möjliga vändningar. Det är därför bra att tänka att g_0 alltid sitter fast.

Sammanfattningsvis är vår modell av evolution att genomet ges av en tecknad, cirkulär permutation av gener. Den evolutionära processen består av att vändningar väljs slumpmässigt, med lika sannolikhet för alla vändningar, och sedan appliceras på genomet. Antalet vändningar som skett mellan två genom är proportionellt mot den tid som skiljer dessa åt, så ju färre vändningar som skett, desto närmare släkt är dessa genom.

Exempel 1.2. Vid någon tidpunkt har en art genomet $[g_0 g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6]$. Då splittras populationen i två delar, som utvecklas var för sig. Den ena utsätts

för följande mutationskedja:

$$\begin{aligned} [g_0 \ g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4 \ g_5 \ g_6] &\longrightarrow [g_0 \ -g_4 \ -g_3 \ -g_2 \ -g_1 \ g_5 \ g_6] \\ &\longrightarrow [g_0 \ g_3 \ g_4 \ -g_2 \ -g_1 \ g_5 \ g_6] \end{aligned}$$

och den andra för mutationskedjan

$$[g_0 \ g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4 \ g_5 \ g_6] \longrightarrow [g_0 \ g_1 \ g_2 \ -g_5 \ -g_4 \ -g_3 \ g_6].$$

Vill vi beräkna ett evolutionärt avståndet mellan dessa två arter ska vi alltså jämföra $[g_0 \ g_3 \ g_4 \ -g_2 \ -g_1 \ g_5 \ g_6]$ med $[g_0 \ g_1 \ g_2 \ -g_5 \ -g_4 \ -g_3 \ g_6]$. Detta avstånd, delat med två, är ungefär avståndet till deras närmsta gemensamma anfader. \blacktriangle

1.3 Evolutionära avstånd

Det finns många sätt att ange hur pass nära släkt två genom är, och vi kommer att kalla alla dessa för **evolutionära avstånd**. Det är viktigt att notera att dessa olika avstånd stämmer bättre eller sämre överens med det **verkliga** avståndet, vilket vi kallar det verkliga antalet vändningar som skett mellan två genom.

Att beräkna antalet vändningar som skett mellan två genom är i princip omöjligt, eftersom man inte från genomen kan se exakt hur många vändningar som har skett. Det skiljer tre vändningar mellan våra två genom i exemplet, men man kan även omvandla det ena av dem till det andra med fem, sex eller fler vändningar, så dessa avstånd är också möjliga. Man kan dock oftast ge rätt så goda gissningar angående det verkliga antalet vändningar. Om genomen inte ligger alltför långt från varandra är det troligt att det minsta antalet vändningar som behövs för att omvandla det ena genomet till det andra är en bra gissning. Därför är det ett intressant problem att beräkna det minsta antalet vändningar mellan två genom. Vi kallar detta **vändningsavståndet** och kommer att ge en formel för detta i nästa kapitel.

Vi kan dock presentera bättre uppskattningar av det verkliga avståndet. I resterande delen av kompendiet kommer vi att titta på ett enklare avstånd, brytpunktsavståndet, och beräkna det förväntade brytpunktsavståndet efter t vändningar. En sådan beskrivning ger en bra uppskattning av det verkliga avståndet (en tydligare beskrivning ges i avsnitt 2.5).

Man bör lägga märke till att vi alltid kan byta namn på elementen i två genom så att det ena blir **identitetsgenomet** $id = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{n-1}]$. Att omvandla det andra till detta genom kan ses som att sortera det andra. Vi kommer framöver alltid låta det ena genomet vara identitetsgenomet.

Om vi utgår från två genom π och τ och skriver om π så att det blir id , så förändras även τ på motsvarande sätt. Vi använder beteckningen τ_π för detta nya sätt att skriva τ . Att omvandla τ_π till id med vändningar blir då samma sak som att omvandla τ till π med vändningar.

Exempel 1.3. Vi tittar på genomen i föregående exempel. Där hade vi $\pi = [g_0 \ g_3 \ g_4 \ -g_2 \ -g_1 \ g_5 \ g_6]$ och $\tau = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ -g_5 \ -g_4 \ -g_3 \ g_6]$.

Antag att vi vill ändra namnen på generna i π så att π blir id. Det innebär att den gen som tidigare hette g_3 nu heter g_1 , den som hette g_4 heter g_2 och den som hette $-g_2$ går nu under namnet g_3 , och så vidare. Fortsätter vi med namnbytena på detta sätt får vi $\tau_\pi = [g_0 \ -g_4 \ -g_3 \ -g_5 \ -g_2 \ -g_1 \ g_6]$. Att sortera detta τ_π är samma sak som att omvandla det ursprungliga τ till det ursprungliga π .

På samma sätt får vi att om vi låter τ bli identitetsgenomet så blir π genomet $\tau_\tau = [g_0 \ -g_5 \ -g_4 \ -g_2 \ -g_1 \ -g_3 \ g_6]$. ▲

Eftersom det är samma sak att omvandla τ till π som att omvandla τ_π till id kommer vi framöver huvudsakligen att betrakta omvandlingar till id. Vi pratar så om att **sortera** ett genom.

1.4 Induktion

Vi kommer i nästa avsnitt att använda oss av en matematisk beviseteknik som kallas **induktion**. Den kommer även till nytta i kapitel 9. För de som inte har sett induktion tidigare följer här en kort genomgång.

Vi beskriver enklast induktion med hjälp av ett exempel. Vi ska bevisa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Man ser enkelt att formeln gäller för $n = 1$, för $n = 2$, för $n = 3$ och för vilket n man än väljer att prova. Men vi kommer aldrig hinna prova alla n , så vi måste välja en bättre metod. Det verkar inte heller gå att direkt räkna ut att $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$ blir den kvot vi vill att det ska bli. Vi kan emellertid lätt visa detta med induktion.

Idén bakom induktion är att visa att om likheten är sann för ett givet n så är den också sann för nästa värde, d.v.s. $n + 1$. Om vi dessutom kan visa att likheten är sann för ett startvärde, i detta fall $n = 1$, så är den därmed sann för nästa värde ($n = 2$) och nästa ($n = 3$) och nästa och nästa, etc. Den är i själva verket sann för alla $n \geq 1$.

Att visa att likheten är sann för det första värdet kallas **basfall** och att visa den är sann för ett värde om den är sann för föregående värde kallas **induktionssteg**.

Vi börjar med basfallet. Vi ska visa att likheten är sann för $n = 1$. Vi ser att vänsterledet blir 1, och i högerledet får vi $(2 + 3 + 1)/6 = 1$. Likheten är alltså sann för $n = 1$.

Nu till induktionssteget. Antag att det för ett givet n stämmer att

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Vi undersöker om likheten då gäller för nästkommande heltal, d.v.s. vi undersöker om det är sant att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)}{6}.$$

För att visa detta använder vi naturligtvis vårt antagande. Vi observerar att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2$$

och vi kan nu använda vårt antagande:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\ &= \frac{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1}{6} \\ &= \frac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Vi har nu visat att om likheten gäller för något fixt värde n , så gäller den också för nästkommande värde, d.v.s. $n+1$. Tillsammans med basfallet visar detta är likheten stämmer för alla $n \geq 1$.

1.5 Vändningar och binomialkoefficienter

Det är naturligt att fundera över hur många vändningar det finns, som kan appliceras på ett genom $g = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{n-1}]$ av **längd** n . När vi såg genomet som pärlor på en ståltråd såg vi att vi kan få varje vändning genom att dela upp genomet i två intervall. Det ena innehåller g_0 och det påverkas inte, men det andra vänder vi. Vi kan dela upp genomet i dessa två intervall genom att välja två olika gener, som får inleda varsitt intervall. Det räcker alltså att beräkna hur många sätt det finns att välja två olika element bland n element.

Mer generellt kan vi betrakta problemet att välja k element bland n element. Detta tal betecknas $\binom{n}{k}$ och uttalas "n välj k". Talen kallas även **binomialkoefficienter**.

Det finns flera sätt att ta fram ett uttryck för binomialkoefficienterna. Vi ska här använda en rekursiv konstruktion, men det går även att resonera sig fram till uttrycket direkt.

Antag att vi ska välja k element bland n element. Vi kan börja med ett godtyckligt element a och bestämma om det ska vara med eller inte. Om vi bestämmer att a ska vara med så behöver vi bara välja ytterligare $k - 1$ element bland det återstående $n - 1$ elementen. Om vi inte vill ha med a måste vi välja k element bland de $n - 1$ återstående elementen. I första fallet kan de återstående valen göras på $\binom{n-1}{k-1}$ olika sätt, i det andra fallet på $\binom{n-1}{k}$ olika sätt. Sammantaget får vi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (1.1)$$

Med hjälp av denna rekursionsformel kan vi ge ett direkt uttryck för binomialkoefficienterna.

Sats 1.4. *Binomialkoefficienterna för $0 \leq k \leq n$ ges av*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

där $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ för $n \geq 1$, och $0! = 1$.

BEVIS: Vi använder här induktion över variabeln n . Vi kommer att anta att formeln gäller för $n - 1$ och ska visa att den gäller för n . Detta gör vi med hjälp av rekursionen (1.1). Som basfall har vi alla de fall då vi inte kan använda rekursionen, nämligen då $n = 0$, och då $k = 0$ eller $k = n$.

Antag $k = n$. Binomialkoefficienten ska då ange antalet sätt att ur en mängd med n element välja samtliga av dessa. Det kan ske på ett sätt. Vi tittar nu på formeln:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1.$$

På samma sätt ser vi att om vi ska välja $k = 0$ element bland n element så kan även det ske på ett enda sätt. Formeln ger

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Fallet $n = 0$ kräver $k = 0$, så det har vi redan betraktat. Alltså ser vi att formeln stämmer överens med det vi vill ha i dessa fall.

Vi har nu klarat av basfallet och ska kontrollera att formeln stämmer överens med rekursionen. Vi antar att formeln gäller i högerledet i rekursionen, där vi väljer bland $n - 1$ element, och vill visa att den då gäller i vänsterledet, där vi väljer bland n element. Lyckas vi med detta inser vi att formeln alltid gäller för nästa värde på n , med början i $n = 0$ som vi redan visat.

Vi får

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{k}{k(n-k)} + \frac{n-k}{k(n-k)} \right) \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{k+(n-k)}{k(n-k)} \right) \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{n}{k(n-k)} \right) \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!}
 \end{aligned}$$

Eftersom både basfall och induktionssteg är uppfyllda vet vi att formeln stämmer för alla k och n som uppfyller $0 \leq k \leq n$. ■

Vi får nu följande följsats.

Följsats 1.5. *Antalet vändningar som kan appliceras på ett genom med n gener är*

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Det är vanligt att presentera binomialkoefficienterna i en triangelform, som kallas **Pascals triangel**. Vi har skrivit ut de första raderna i denna i tabell 1. Observera att eftersom rekursionen (1.1) gäller så fås varje element utom de yttersta som summan av de två elementen snett ovanför. Binomialkoefficienterna $\binom{n}{2}$ i följsatsen ovan finner vi i tredje diagonalen från vänster: 1, 3, 6, 10, ...

1.6 Övningar

Övning 1.1. Skriv $\pi = [g_3 \ g_2 \ -g_4 \ g_1 \ -g_0]$ på normalform, det vill säga med g_0 först. Finn ett sätt att omvandla $\tau = [g_0 \ g_4 \ g_2 \ g_3 \ g_1]$ till π genom att beräkna τ_π och sedan omvandla detta till id.

Övning 1.2. Låt π vara ett genom. Vad är π_π ?

Övning 1.3. Beräkna de första tio raderna i Pascals triangel. Dessa kommer du ha nytta av i kapitel 7.

Tabell 1: Pascals triangel. I rad n och position k från vänster finner vi $\binom{n-1}{k-1}$. Överst har vi alltså $\binom{0}{0}$.

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			

Övning 1.4. Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Övning 1.5. Visa att $3^n > n^3$ för alla $n \geq 4$.

Övning 1.6. Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Övning 1.7. Visa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

för $n \geq 0$. Enklast är att använda induktion.

Övning 1.8. Hur många förflyttningar finns det på ett genom med n gener? Hur många vända förflyttningar finns det?

Övning 1.9. (Överkurs) Hur många genom finns det med n gener?

Övning 1.10. (a) Visa att du kan komma från ett genom med n gener till ett annat genom med n gener med enbart vändningar. (Tips: Använd induktion över n)

(b) En **avståndsfunktion** på en mängd är en funktion d som för varje par a och b ur mängden ger talet $d(a, b)$. För tre element a, b och c ur mängden har vi

(i) $d(a, b) \geq 0$ och $d(a, b) = 0$ om och endast om $a = b$,

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$,

(iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Visa att om π och τ är genom med n gener och $d(\pi, \tau)$ är det minsta antalet vändningar för att överföra π till τ så är d en avståndsfunktion på genom med n gener.

2 Kortaste avstånd mellan två genom

Ett enkelt sätt att uppskatta den sträcka ett objekt har färdats mellan A och B är att beräkna fågelvägen, den kortaste sträckan mellan dessa två punkter. Man kan se förändringen av ett genom som en resa bland alla möjliga genom. Vi kommer här att visa hur man kan beräkna det kortaste avståndet, vändningsavståndet, mellan två godtyckliga genom.

2.1 Brytpunkter

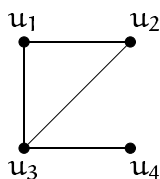
Vi inleder detta kapitel genom att beskriva ett enkelt sätt att mäta avstånd mellan två genom. Det är inte lika användbart som de metoder vi beskriver senare, eftersom avståndet i allmänhet inte stämmer lika bra överens med det okända genetiska avståndet, men det behövs för att beskriva dessa.

Vi säger att elementet **b följer** elementet **a** i ett genom om genomet innehåller [... a b ...] eller [... -b -a ...]. Elementen **a** och **b** definierar en **brytpunkt** mellan två genom om **b** följer **a** i det första genomet, men inte i det andra. Antalet brytpunkter mellan två genom π och τ kallas **brytpunktsavståndet** mellan dem och betecknas $b(\pi, \tau)$. Antalet brytpunkter mellan π och id, d.v.s. $b(\pi, \text{id})$, betecknas ofta $b(\pi)$. Detta är det intressanta måttet för oss, eftersom vi alltid kan skriva om genomerna så att ett av dem blir identitetsgenomet, utan att för den skull ändra något av avstånden mellan dem.

Exempel 2.1. Betrakta τ och π i exempel 1.3. Vill vi beräkna brytpunktsavståndet mellan dessa är det enklast att beräkna $b(\pi_\tau)$ eller $b(\tau_\pi)$. I bägge dessa fall får vi 4. ▲

2.2 Grafteori

Inom flera delar av matematiken använder man sig ofta av grafer. En **graf** består här av två mängder: **hörmängden** V (*vertices* på engelska) och **kantmängden** E (*edges*), som består av par av hörn. Oftast ritar man ut hörnen som punkter och kanterna som streck mellan de två hörn som utgör kanten.



Figur 4: En graf med fyra hörn och fyra kanter.

Exempel 2.2. I figur 4 ser vi ett exempel på en graf. Denna graf har fyra hörn, u_1, u_2, u_3 och u_4 , och kanterna är (u_1, u_2) , (u_1, u_3) , (u_2, u_4) och (u_3, u_4) . ▲

Om det går en kant mellan hörnen u och v så säger vi att u är granne till v och vice versa. Med **valensen** $d(u)$ till ett hörn u menas antalet grannar till detta hörn. Om alla hörn i en graf har valens r så är grafen **r -reguljär**.

En **cykel** av längd n är en följd $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ av hörn sådan att det går en kant mellan v_i och v_{i+1} för alla i mellan 0 och $n-1$, och $v_i \neq v_j$ för alla i och j utom $v_0 = v_n$. Vi kan alltså gå till dessa hörn i denna ordning genom att följa kanter, och vi kommer tillbaka till starthörnet.

Exempel 2.3. I grafen ovan har hörn u_1 och u_2 valens 2 , hörn u_3 har valens 3 och hörn u_4 har valens 1 . Grafen är alltså inte reguljär. Den enda cykeln är u_1, u_2, u_3, u_1 . ▲

2.3 Brytpunktsgraf

Vi definierade en brytpunkt mellan två genom som ett par av gener som följer varandra i det ena genomet men inte i det andra. Eftersom vi låter det ena genomet vara identitetsgenomet har vi en brytpunkt mellan två på varandra följande gener g_i och g_j i det andra genomet om vi inte har $j = i + 1$ (vi låter här $g_0 = g_n$ om det gör att likheten uppfylls). Vi har här använt konventionen att $-g_j = g_{-j}$, så om $-g_3$ följer efter $-g_4$ har vi ingen brytpunkt, eftersom vi då har generna g_{-4} och g_{-3} som uppfyller $j = -3 = -4 + 1 = i + 1$.

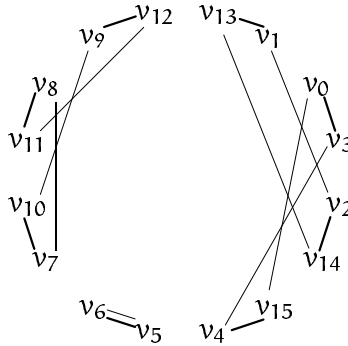
Vi ska nu skapa en graf som hjälper oss att beräkna antalet vändningar som behövs för att sortera ett genom. Varje gen kommer att omvandlas till två hörn. Vi ritar hörnen moturs på en cirkel, i samma ordning som deras gener ligger i genomet. Om en gen g_i har positivt tecken ger den hörnen v_{2i} och v_{2i+1} i denna ordning, men har den negativt tecken skrivs hörnen i omvänd ordning. Mellan två hörn som ligger bredvid varandra men inte kommer från samma gen drar vi en tjock kant. Slutligen dras en tunn kant mellan hörnen v_{2k-1} och v_{2k} för k mellan 1 och $n-1$, och mellan hörnen v_{2n-1} och v_0 . Ett exempel ges i figur 5.

Vi ser att grafen är 2-reguljär och att varje hörn har en tjock och en tunn kant till sig. Kanterna bildar alltså cykler, med varannan kant tjock och varannan kant tunn. Vi ser också att där vi inte hade brytpunkter i genomet har vi nu cykler med bara två kanter, men där vi hade brytpunkter har vi cykler med fler kanter.

2.4 Sortera genom

Om vi betraktar brytpunktsgraf till identitetsgenomet id ser vi att den har n cykler. Brytpunktsgraferna till andra genom har färre cykler, så att sortera ett genom svarar mot att öka antalet cykler till n . Vi ska nu titta på hur man kan öka antalet cykler så snabbt som möjligt.

Vändningar i brytpunktsgraf svarar mot vändningar på ett vanligt genom. Vi väljer ett segment av cirkeln och skriver hörnen i omvänd ordning. Al-



Figur 5: Brytpunktsgrafen till $[g_0 -g_6 -g_4 -g_5 -g_3 -g_2 -g_7 g_1]$.

la tunna kanter följer med sina hörn, men de tjocka ligger kvar. Eftersom vändningarna inte kan dela någon gen så börjar och slutar segmenten i brytpunktsgrafan mitt i en tjock kant. Vi säger att en vändning **klyver** dessa två tjocka kanter.

Vi ska nu undersöka vad som händer med antalet cykler då vi utför en vändning. Betrakta figur 6. Vi låter de kluvna kanterna vara de mellan a och b och mellan c och d. De prickade kurvorna i figuren antyder hur hörnen hänger ihop, via ett okänt antal kanter.

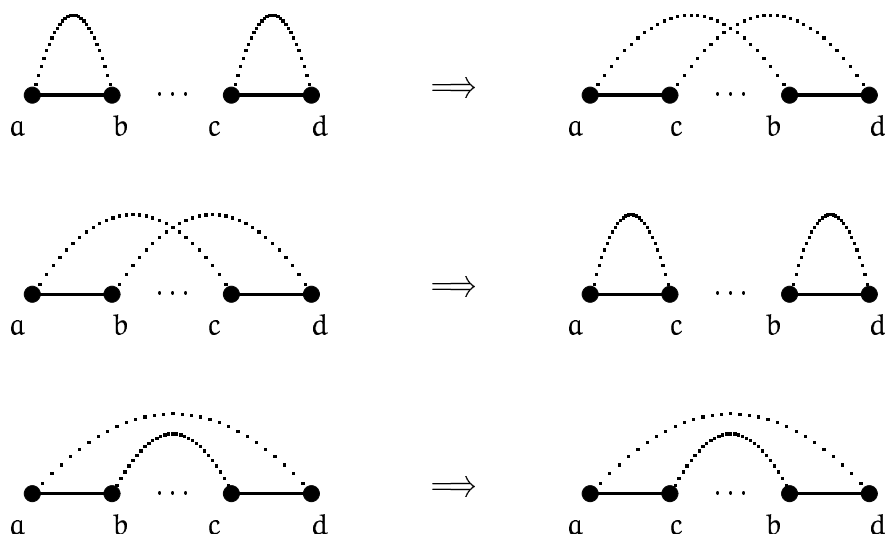
Kring de två tjocka kanterna som klyvs finns fyra hörn som kan vara sammanbundna på tre olika sätt. I det första fallet har vi två cykler som slås ihop. Det blir litet mer komplicerat om de tjocka kanterna hör till samma cykel. Vi säger att två tjocka kanter är **likriktade** om vi går längs dem åt samma håll när vi går längs kanterna i en cykel. Längst ner i figuren har vi likriktade kanter, eftersom vi antingen går åt höger längs båda dessa kanter, eller åt vänster längs båda kanterna, när vi följer kanterna i cykeln. I mittenfiguren, däremot, går vi längs kanterna åt olika håll och därmed är de olikriktade.

När vi har olikriktade kanter, som i andra fallet, kommer cykeln att delas i två delar. Har vi däremot likriktade kanter, som nederst i figuren, sker inget med cykeln. Det kan dock ske saker med likriktningen av andra kanter, eftersom riktningen av kanterna mellan våra två hörn ändras.

Denna analys ger en första uppskattning angående antalet vändningar som krävs för att sortera ett genom. Vi låter här $c(\pi)$ beteckna antalet cykler i brytpunktsgrafan till π .

Sats 2.4. *Antalet vändningar som krävs för att sortera ett genom π är minst $n - c(\pi)$.*

BEVIS: Vi startar med $c(\pi)$ cykler och ska öka antalet cykler till n . Med en vändning kan vi öka antalet cykler med maximalt 1. Därmed krävs minst $n - c(\pi)$ vändningar för att få n cykler. ■



Figur 6: Tre olika resultat efter vändning. Om en vändning berör två kanter i olika cykler slås dessa ihop (överst). Om en vändning berör två olikriktade kanter i samma cykel delas cykeln (mitten). Om en vändning berör två likriktade kanter i samma cykel ändras inte antalet cykler.

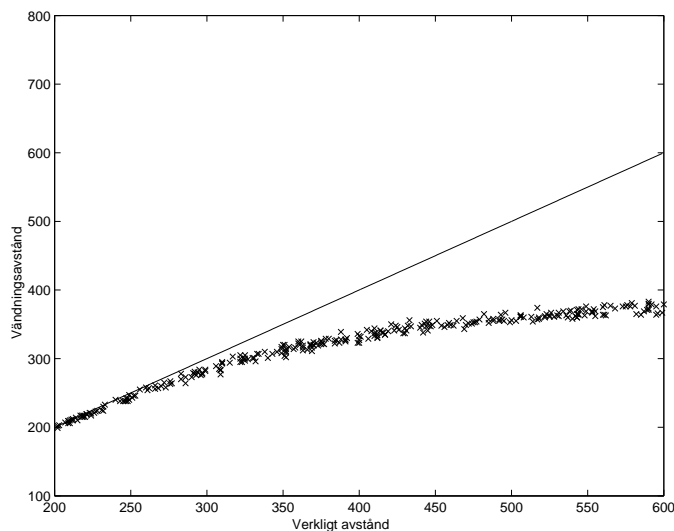
Optimal utdelning har vi alltså om det vändningen berör två olikriktade tjocka kanter i samma cykel. Målet är därför att finna en strategi som gör att denna situation förekommer så ofta som möjligt. Man kan visa att man oftast klarar sig med vändningar av detta slag. Några av övningarna handlar om detta.

2.5 Ett bättre avståndsmått

Det kortaste brytpunktsavståndet fungerar rätt så väl som gissning av det verkliga avståndet för genom som ligger rätt nära varandra. Värre är det om det ligger på stort avstånd. Vi har gjort simuleringar av genom med 400 gener, vars verkliga avstånd till id satts slumpmässigt mellan 200 och 600 vändningar. Vi har sedan ritat vändningsavståndet till id i en graf (figur 7). Vi ser att ju fler vändningar som skett, desto större blir skillnaden mellan det verkliga avståndet och vändningsavståndet.

Brytpunktsavståndet mellan två genom är rätt så proportionellt mot antalet vändningar, men det fungerar sämre än vändningsavståndet för att skatta det verkliga avståndet. Vi kan däremot ta fram en ännu bättre skattning av det verkliga avståndet med hjälp av detta avstånd. Idén till detta beskriver vi här.

Vi tänker oss att vi utför ett antal vändningar på ett genom. I varje steg beräknar vi det förväntade antalet brytpunkter vi har mellan det genom vi får



Figur 7: Förhållandet mellan det verkliga avståndet och vändningsavståndet för några genom med 400 gener.

och det ursprungliga genomet. Vi får då det förväntade antalet brytpunkter mellan två genom som funktion av antalet vändningar. Om denna funktionen har en invers får vi det förväntade antalet vändningar som funktion av brytpunktsavståndet. Vi kan då beräkna antalet brytpunkter och mata in i denna nya funktion, så får vi det förväntade antalet vändningar. Detta är vad vi kommer att komma fram till i sista kapitlet.

2.6 Övningar

Övning 2.1. Beräkna brytpunktsavståndet och vändningsavståndet för $\pi = [g_0 \ g_5 \ -g_4 \ -g_3 \ g_1 \ g_2]$.

Övning 2.2. Låt $c_{\text{stor}}(\pi)$ beteckna antalet cykler med fler än två kanter i brytpunktsgrafan till π . Visa att det approximativa avståndet $n - c(\pi)$ även kan skrivas $b(\pi) - c_{\text{stor}}(\pi)$.

Övning 2.3. Visa att om ett genom saknar minustecken så finns inga vändningar som ökar antalet cykler i dess brytpunktsgraf.

Övning 2.4. Vilket är det maximala kortaste avståndet till id? Ge exempel på ett genom som har detta avstånd till id.

Övning 2.5. Antag att brytpunktsgrafan är ritad med raka kanter. Vi säger då att två cykler vars kanter korsar varandra ligger i samma **komponent**. Detta gäller även transitivt, så om cyklerna π och τ ligger i samma komponent

och om τ och σ ligger i samma komponent, så ligger även π och σ i samma komponent. I figur 5 har vi till exempel tre komponenter, varav en innehåller två cykler.

Man kan visa att om en komponent innehåller en cykel med två olikriktade tjocka kanter, så kan man alltid utföra en vändning så att antalet cykler ökar och att samtliga komponenter som uppstått ur den ursprungliga komponenten antingen har en cykel med två olikriktade kanter eller innehåller bara en tjock kant. Visa att detta medför att en komponent τ kan sorteras med $n(\tau) - c(\tau)$ vändningar, där $n(\tau)$ är antalet tjocka kanter i τ och $c(\tau)$ är antalet cykler i τ .

Övning 2.6. Använd föregående uppgift för att visa att om samtliga komponenter i π antingen innehåller en cykel med två olikriktade kanter eller bara har en tjock kant, så kan π sorteras med $n - c(\pi)$ vändningar.

Övning 2.7. Den som är duktig på att programmera kan undersöka hur vanligt det är med genom som kan sorteras med $n - c(\pi)$ vändningar. Bestäm ett lagom stort n . Skapa ett slumpmässigt genom genom att utgå från identitetsgenomet och byta första elementet mot ett slumpmässigt valt element på platserna 1 till n . Sedan slumpas tecknet för första elementet. Därefter byta vi andra elementet mot ett slumpmässigt valt element på platserna 2 till n och väljer tecken. Fortsätt på samma sätt tills alla positionerna gått igenom. Då har vi ett slumpmässigt valt genom.

Skriv sedan rutiner som finner cyklerna, som delar in cyklerna i komponenter och som kollar om en komponent innehåller någon cykel med olikriktade tjocka kanter. Genom att upprepa detta experiment många gånger går man inblick i andelen genom som har det angivna avståndet till id.

Övning 2.8. Visa att om alla hörn i en graf har valensen två så är varje hörn med i exakt en cykel.

3 Matriser

3.1 Matriser

En $n \times m$ -**matris** A är en rektangulär samling tal i n **rader** och m **kolonner**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Talet a_{ij} är det tal som står på rad i och kolonn j . En annan beteckning är

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}. \quad (3.2)$$

Nollmatrisen (av storlek $(n \times m)$) är matrisen vars tal alla är noll och betecknas 0 . Om $n = m$ kallas A en **kvadratisk** matris. Låt B vara en $n \times m$ -matris och s ett reellt tal. Vi definierar **summan** av två $m \times n$ -matriser som

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \quad (3.3)$$

och **multiplikation med talet** s som

$$sA = s(a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} = (sa_{ij})_{i,j=1}^{n,m}. \quad (3.4)$$

När vi adderar två matriser så adderar vi alltså talen på samma position och när vi multiplicerar en matris med ett tal s så multipliceras varje tal i matrisen med s .

Exempel 3.1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Vi har att

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & 13 & 9 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad -2A = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 14 \\ -6 & -10 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

▲

Låt A vara en $n \times m$ -matris och B en $m \times p$ -matris. Produkten AB definieras som den $n \times p$ -matris C som på rad i och kolonn j har talet

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}. \quad (3.7)$$

Produkten AB är endast definierad om antalet kolonner i A sammanfaller med antalet rader i B . Märk att BA ej nödvändigtvis är definierad även om multiplikationen AB är definierad. Vi definierar även

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ gånger}}. \quad (3.8)$$

Exempel 3.2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 11 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Från definitionen av multiplikation är

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 11 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 & -1 \cdot 7 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 6 & -2 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 42 & 33 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

▲

Exempel 3.3. Multiplikationerna

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (22) \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

visar att även om multiplikationerna AB och BA är definierade behöver de ej sammanfalla. ▲

Antag att A, B och C är matriser sådana att nedanstående multiplikationer är definierade. Matrismultiplikation uppfyller **distributiva lagen**

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC. \quad (3.12)$$

och **associativa lagen**

$$A(BC) = (AB)C \quad (3.13)$$

Det är lämnat som en övning att visa identiteterna (3.12) och (3.13).

Matriser som består av endast en kolonn kallas för **vektorer**. Vektorer uppfyller därför de räkneregler som matriser gör. Vi definierar

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} : u_i \in \mathbb{R} \text{ för alla } i \right\}, \quad (3.14)$$

där \mathbb{R} är de reella talen, d.v.s. talen på tallinjen.

Exempel 3.4. Vektorn

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

är en vektor i \mathbb{R}^3 . Alltså $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. ▲

3.2 Inverterbarhet

Låt E vara den kvadratiske matrisen sådan att

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Matrisen E kallas **enhetsmatrisen** och uppfyller att

$$AE = EA = A \quad (3.17)$$

för alla kvadratiske matriser A sådana att multiplikationen är definierad. Ibland används notationen E_n för att betyda att E är en $n \times n$ -matris.

Definition 3.5. En kvadratisk matris A sägs vara **inverterbar** om det existerar en matris B sådan att

$$AB = BA = E. \quad (3.18)$$

Matrisen B kallas **inversen** till A och betecknas A^{-1} .

Inversen till A är entydig ty antag att det finns två matriser B och C sådana att (3.18) är uppfyllt. Vi har då att $B = BE = BAC = EC = C$, så matriserna är lika.

Exempel 3.6. Låt A vara den inverterbara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

För att beräkna inversen till A måste vi finna en matris B sådan att $AB = BA = E$. Ansätt

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

och lös ekvationen $AB = E$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} b_{11} & + & 2b_{21} & = & 0 \\ 3b_{11} & + & 4b_{21} & = & 1 \\ & b_{12} & + & 2b_{22} & = & 1 \\ & 3b_{12} & + & 4b_{22} & = & 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Om vi adderar -3 av den första ekvationen till den andra och -3 av den tredje ekvationen till den fjärde får vi

$$\begin{cases} b_{11} & + & 2b_{21} & = & 0 \\ & - & 2b_{21} & = & 1 \\ & b_{12} & + & 2b_{22} & = & 1 \\ & & - & 2b_{22} & = & -3 \end{cases} \quad (3.23)$$

Från (3.23) ser vi att $b_{21} = -\frac{1}{2}$, $b_{11} = 1$, $b_{22} = \frac{3}{2}$ och $b_{12} = -2$. Alltså

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Om vi nu utför multiplikationerna AB och BA ser vi att vi får enhetsmatrisen. Alltså är matrisen B inversen till A . \blacktriangle

Exempel 3.7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

För att beräkna en eventuell invers till A måste vi finna en matris B sådan att $AB = BA = E$. Ansätt

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

och lös ekvationen $AB = E$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} b_{11} & + & 2b_{21} & = & 0 \\ 2b_{11} & + & 4b_{21} & = & 1 \\ & b_{12} & + & 2b_{22} & = & 1 \\ & 2b_{12} & + & 4b_{22} & = & 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Om vi adderar -2 av den första ekvationen till den andra och -2 av den tredje ekvationen till den fjärde får vi

$$\begin{cases} b_{11} & + & 2b_{21} & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \\ & b_{12} & + & 2b_{22} & = & 1 \\ & & & 0 & = & -2 \end{cases} \quad (3.29)$$

Här ser vi att ekvationssystemet är olösbart. Alltså saknar matrisen A invers. \blacktriangle

Sats 3.8. Låt A vara en $n \times n$ -matris. Då är A inverterbar om och endast om det för varje $y \in \mathbb{R}^n$ finns ett entydigt $x \in \mathbb{R}^n$ så att $Ax = y$.

BEVIS: Antag att matrisen A är inverterbar och låt $y \in \mathbb{R}^n$. Vektorn $x = A^{-1}y$ uppfyller nu att $Ax = AA^{-1}y = y$. Antag att det finns två vektorer x_1 och x_2 som uppfyller ekvationen $Ax = y$. Då följer att $x_1 = A^{-1}Ax_1 = A^{-1}y = A^{-1}Ax_2 = x_2$. Alltså är lösningen entydig.

Antag omvänt att det för varje $y \in \mathbb{R}^n$ finns ett entydigt $x \in \mathbb{R}^n$ så att $Ax = y$. Låt

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

och låt vektorerna B_j vara de vektorer som uppfyller att $AB_j = e_j$. Definiera matrisen B som består av kolonnerna B_1, B_2, \dots, B_n och har egenskapen att

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = E. \quad (3.31)$$

Det återstår att visa att $BA = E$. Vi har att

$$A(BA) = (AB)A = EA = A. \quad (3.32)$$

Matrisen $C = BA$ uppfyller alltså ekvationen $AC = A$, vilket även enhetsmatrisen E gör, d.v.s. $AC_j = A_j$ och $Ae_j = A_j$ där A_j och C_j är kolonnerna i matrisen A respektive AC . Enligt antagandet har ekvationen $Ax = y$ en entydig lösning för alla y . Detta ger att $C_j = e_j$ för alla j och därmed även att $C = E$. ■

3.3 Transponering av matriser

Definition 3.9. Låt $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$. Den **transponerade** matrisen A^T till A definieras som $A^T = (a_{ji})_{j,i=1}^{m,n}$.

Exempel 3.10. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Vi har då att

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

▲

Antag att A är en $n \times m$ -matris och att B är en $m \times p$ -matris. Av formel (3.7) följer att på rad i och kolonn j i $n \times p$ -matrisen AB finns elementet

$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$. Därmed har vi att talet på rad i och kolonn j i matrisen $(AB)^T$ är c_{ji} .

Av formel (3.7) har vi att talet d_{ij} på rad i och kolonn j i matrisen $B^T A^T$ är

$$\begin{aligned} d_{ij} &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{mi}a_{jm} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jm}b_{mi} = c_{ji}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Alltså är

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (3.36)$$

Antag nu att A är inverterbar. Då följer att

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \quad (3.37)$$

ty $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$, vilket visar att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3.4 Skalarprodukt och längd av vektorer

Definition 3.11. Låt $u, v \in \mathbb{R}^n$. Vi definierar **skalarprodukten** av u och v som det reella talet $(u, v) = u^T v$.

Vi säger att två vektorer u och v är **ortogonala** om $(u, v) = 0$.

Definition 3.12. Låt $u \in \mathbb{R}^n$. Vi definierar **längden** av u som

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (3.38)$$

Exempel 3.13. Låt $u = (3 \ 4)^T$. Då följer att

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{u^T u} = \sqrt{(3 \ 4) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{9 + 16} = 5. \quad (3.39)$$

▲

Definition 3.14. En matris A kallas **symmetrisk** om $A = A^T$.

För en symmetrisk matris gäller att $(Au, v) = (Au)^T v = u^T A^T v = u^T A v = (u, Av)$.

3.5 Övningar

Övning 3.1. Bevisa formel (3.12) och i fallet för 2×2 -matriser formel (3.13).

Övning 3.2. Beräkna A^2 , A^3 och A^4 för matrisen

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Övning 3.3. Låt $u = (2 \ 3 \ -1)$ och $v = (1 \ -4 \ -3)$. Beräkna $\|u\|$, $\|v\|^2$ och (u, v) .

Övning 3.4. Bevisa att inversen till matrisen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i fallet $ad - bc \neq 0$ är

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Övning 3.5. Visa att om A är en kvadratisk matris sådan att $A^k = 0$, så är $E - A$ inverterbar med inversen $E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.

4 Baser och dimension

4.1 Delrum

Definition 4.1. En icke-tom delmängd U av \mathbb{R}^n sägs vara ett **delrum** av \mathbb{R}^n om för alla $u, v \in U$ och för alla $s \in \mathbb{R}$ gäller att

$$u + v \in U \quad (4.1)$$

och

$$su \in U. \quad (4.2)$$

Exempel 4.2. Lösningarna till ekvationen

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \quad (4.3)$$

är ett delrum av \mathbb{R}^4 . Ty låt U vara mängden av alla lösningar till ekvationen (4.3). Antag att $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T$ och $v = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T$ ligger i U . Vi vill visa att $w = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4)^T = u + v$ också ligger i U . Detta är klart, då vi har att

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_3 - w_4 &= (u_1 + v_1) + 2(u_3 + v_3) - (u_4 + v_4) \\ &= (u_1 + 2u_3 - u_4) + (v_1 + 2v_3 - v_4) = 0 + 0 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

På liknande sätt visar man att $s \cdot u$ är med i U , för alla tal s . ▲

En vektor $u \in \mathbb{R}^n$ kallas en **linjärkombination** av vektorerna $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ om

$$u = s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_m u_m \quad (4.5)$$

där s_i är reella tal. Vektorerna u_1, \dots, u_m sägs vara **linjärt oberoende** om

$$s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_m u_m = 0 \quad (4.6)$$

medför att $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$. Annars sägs vektorerna vara **linjärt beroende**.

Lemma 4.3. *Vektorerna u_1, \dots, u_m är linjärt beroende om och endast om någon vektor är en linjärkombination av de övriga.*

BEVIS: Antag att u_1, \dots, u_m är linjärt beroende. Då finns det reella tal s_1, \dots, s_m där inte alla är noll så att $s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_m u_m = 0$. Antag att $s_p \neq 0$. Då följer att

$$u_p = \sum_{i \neq p} \frac{s_i}{s_p} u_i. \quad (4.7)$$

Alltså är u_p en linjärkombination av de övriga. Omvänt, låt u_p vara en linjärkombination av de övriga vektorerna, d.v.s. det finns reella tal t_i så att

$$u_p = \sum_{i \neq p} t_i u_i. \quad (4.8)$$

Då gäller att

$$\sum_{i \neq p} t_i u_i - u_p = 0, \quad (4.9)$$

utan att alla koefficienter är noll. Alltså är vektorerna linjärt beroende. ■

Låt vektorerna u_1, \dots, u_m i \mathbb{R}^n vara givna. Mängden U av alla linjära kombinationer $s_1 u_1 + \dots + s_m u_m$ av vektorerna u_1, \dots, u_m bildar ett delrum av \mathbb{R}^n , vilket läsaren lätt själv verifierar. Vi kallar U för det **linjära höljet** till vektorerna u_1, \dots, u_m .

Exempel 4.4. Det linjära höljet till vektorerna $u = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$, $v = (2 \ 0 \ -1 \ 0)^T$ och $w = (1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ är ett delrum U av \mathbb{R}^n . Ett godtyckligt element i U är då på formen $(2b + c \ a \ -b \ c)^T$, för några tal a , b och c . ▲

Definition 4.5. Låt U vara ett delrum av \mathbb{R}^n . En mängd vektorer e_1, \dots, e_m sägs vara en **bas** för U om

- (I) vektorerna e_1, \dots, e_m är linjärt oberoende,
- (II) mängden U är linjära höljet av vektorerna e_1, \dots, e_m .

Från (II) får vi att varje vektor $u \in U$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna e_1, \dots, e_m , d.v.s. det finns tal s_1, \dots, s_m så att $u = s_1 e_1 + \dots + s_m e_m$. Denna representation är entydig ty antag att det finns tal t_1, \dots, t_m så att $u = t_1 e_1 + \dots + t_m e_m$. Nu följer att

$$(s_1 - t_1)e_1 + \dots + (s_m - t_m)e_m = 0 \quad (4.10)$$

som enligt (I) ger att $s_i = t_i$ för alla i . Talen s_i kallas för **koordinaterna** för u i basen e_1, \dots, e_m .

Exempel 4.6. Vi fortsätter exempel 4.4 ovan. Vi vill visa att vektorerna $u = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$, $v = (2 \ 0 \ -1 \ 0)^T$ och $w = (1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ är en bas för deras linjära hölje U . Vi måste bara visa att vektorerna u, v och w är linjärt oberoende, eftersom krav (II) i Definition 4.5 uppenbarligen gäller. Antag nu att vi kan skriva $0 = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$ för några tal a, b och c . Vi skall visa att a, b och c måste vara noll. Vi har att

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = \begin{pmatrix} 2b + c \\ a \\ -b \\ c \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Ekvationen ovan har endast lösningen $a = b = c = 0$. Alltså har vi att vektorerna u, v och w är linjärt oberoende, och bildar därmed en bas för U . ▲

Sats 4.8. Låt u_1, \dots, u_m vara vektorer i \mathbb{R}^n , där $m > n$. Då har vi att vektorerna u_1, \dots, u_m är linjärt beroende.

BEVIS: Ekvationen $s_1 u_1 + \dots + s_m u_m = 0$ leder till ett ekvationssystem med n ekvationer och m obekanta variabler, vilket enligt Lemma 4.7 har nollskilda lösningar. ■

Sats 4.9. Varje delrum $U \neq 0$ av \mathbb{R}^n har en bas. Om u_1, \dots, u_m är linjärt oberoende vektorer i U finns det en bas för U som innehåller dessa vektorer.

BEVIS: Första delen följer av den andra delen med $m = 0$.

Tag en vektor $u_1 \neq 0$ i U . Då följer att u_1 är linjärt oberoende ty ekvationen

$$s_1 u_1 = 0 \tag{4.16}$$

ger $s_1 = 0$.

Antag att u_1, \dots, u_{m-1} är linjärt oberoende vektorer i U . Antingen är vektorerna en bas för U eller så finns det en vektor u_m i U som ej är en linjärkombination av u_1, \dots, u_{m-1} . Då följer att ekvationen

$$s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_{m-1} u_{m-1} + s_m u_m = 0 \tag{4.17}$$

endast har lösningen $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$. Detta följer av att $s_m = 0$ ty u_m är ej en linjärkombination av övriga vektorer enligt lemma 4.3 och då är även $s_1 = s_2 = \dots = s_{m-1} = 0$ eftersom vektorerna u_1, \dots, u_{m-1} är linjärt oberoende. Alltså är u_1, u_2, \dots, u_m en mängd linjärt oberoende vektorer.

På detta sätt kan vi steg för steg utöka varje mängd av linjärt oberoende vektorer tills vi fått en bas. Det följer att varje delrum U av \mathbb{R}^n har en bas och att om vi har funnit linjärt oberoende vektorer i U kan vi komplettera dessa med vektorer så att de bildar en bas för U . ■

Sats 4.10. Låt e_1, \dots, e_m vara en bas för delrummet U av \mathbb{R}^n . Då är $m + 1$ eller fler vektorer i U linjärt beroende.

BEVIS: Låt u_1, \dots, u_{m+1} vara vektorer i delrummet U av \mathbb{R}^n . Eftersom e_1, \dots, e_m är en bas för U finns det entydiga tal t_{ji} sådana att

$$u_i = \sum_{j=1}^m t_{ji} e_j, \tag{4.18}$$

för $1 \leq i \leq m + 1$. Vi vill visa att det finns oändligt med lösningar till ekvationen

$$s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_{m+1} u_{m+1} = 0 \tag{4.19}$$

som även kan skrivas som

$$s_1 \sum_{j=1}^m t_{j1} e_j + s_2 \sum_{j=1}^m t_{j2} e_j + \dots + s_{m+1} \sum_{j=1}^m t_{j(m+1)} e_j = 0. \quad (4.20)$$

eller

$$\sum_{j=1}^m (s_1 t_{j1} + s_2 t_{j2} + \dots + s_{m+1} t_{j(m+1)}) e_j = 0. \quad (4.21)$$

Eftersom e_1, \dots, e_m är en bas för U är de linjärt oberoende vilket medför att varje tal $s_1 t_{j1} + s_2 t_{j2} + \dots + s_{m+1} t_{j(m+1)} = 0$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} t_{11}s_1 + t_{12}s_2 + \dots + t_{1(m+1)}s_{m+1} = 0 \\ t_{21}s_1 + t_{22}s_2 + \dots + t_{2(m+1)}s_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ t_{m1}s_1 + t_{m2}s_2 + \dots + t_{m(m+1)}s_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Ekvationssystemet har m ekvationer och $m+1$ obekanta variabler vilket ger oändligt antal lösningar enligt Lemma 4.7. ■

Följdsats 4.11. Låt e_1, \dots, e_m och f_1, \dots, f_k vara två baser för ett delrum U av \mathbb{R}^n . Då följer att $m = k$.

BEVIS: Eftersom e_1, \dots, e_m genererar U och f_1, \dots, f_k är linjärt oberoende måste $k \leq m$ från Sats 4.10. Eftersom f_1, \dots, f_k genererar U och e_1, \dots, e_m är linjärt oberoende måste $m \leq k$. Tillsammans ger det att $m = k$. ■

Definition 4.12. Låt $U \neq \{0\}$ vara ett delrum i \mathbb{R}^n . Då definieras **dimensionen** av U eller $\dim U$ som antalet vektorer i en bas för U . Om $U = \{0\}$ definieras $\dim U = 0$.

Exempel 4.13. Vektorerna

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

bildar en bas i \mathbb{R}^3 . De är linjärt oberoende ty ekvationen

$$s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 = 0 \quad (4.24)$$

är ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

som har den entydiga lösningen $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. De genererar \mathbb{R}^3 ty en godtycklig vektor \mathbf{u} i \mathbb{R}^3 kan skrivas som

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3. \quad (4.26)$$

Därmed har vi att $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, och på liknande sätt visar man att $\dim \mathbb{R}^n = n$, för alla heltal $n > 0$. \blacktriangle

Definition 4.14. Låt A vara en $n \times m$ -matris. Vi definierar **nollrummet** av A som

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\} \quad (4.27)$$

och värderummet av A som

$$V(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : Ax = y, \text{ för något } x \in \mathbb{R}^m\}. \quad (4.28)$$

Man kan visa att nollrummet är ett delrum av \mathbb{R}^m och värderummet är ett delrum av \mathbb{R}^n , vi har valt att lämna detta som en övning för läsaren. Låt $y \in V(A)$, d.v.s. det existerar en vektor $x \in \mathbb{R}^m$ sådan att $Ax = y$. Låt A_1, A_2, \dots, A_m vara kolonnerna i A och $x = (x_i)_{i=1}^m$. Vi får

$$Ax = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = y. \quad (4.29)$$

Detta visar att vektorerna A_1, \dots, A_m , tillika kolonnerna i A , genererar delrummet $V(A)$.

Sats 4.15 (Dimensionssatsen). Låt A vara en $n \times m$ -matris. Då följer att

$$\dim N(A) + \dim V(A) = m. \quad (4.30)$$

BEVIS: Låt $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{R}^m$ vara en bas för $N(A)$. Av sats 4.9 kan vi finna vektorerna $f_1, f_2, \dots, f_q \in \mathbb{R}^m$ sådana att de tillsammans med $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{R}^m$ bildar en bas för \mathbb{R}^m . Alltså är $k + q = m$. För att visa satsen måste vi visa att $q = \dim V(A)$. Vektorerna Af_1, Af_2, \dots, Af_q genererar $V(A)$ ty tag $y \in V(A)$ och låt $x = Ay$. Då följer att det finns tal a_1, \dots, a_k och b_1, \dots, b_q sådana att

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k + b_1 f_1 + \dots + b_q f_q \quad (4.31)$$

och därmed är

$$\begin{aligned} y &= Ax = a_1 A e_1 + \dots + a_k A e_k + b_1 A f_1 + \dots + b_q A f_q \\ &= b_1 A f_1 + \dots + b_q A f_q. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Vi måste visa att vektorerna Af_1, Af_2, \dots, Af_q också är linjärt oberoende. Låt $s_1 Af_1 + s_2 Af_2 + \dots + s_q Af_q = 0$. Då följer av linjäritet att

$$A(s_1 f_1 + s_2 f_2 + \dots + s_q f_q) = 0 \quad (4.33)$$

och därmed att $s_1 f_1 + s_2 f_2 + \dots + s_q f_q \in N(A)$. Detta ger att det finns tal t_1, \dots, t_k så att

$$s_1 f_1 + s_2 f_2 + \dots + s_q f_q = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_k e_k. \quad (4.34)$$

Eftersom $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_q$ bildar en bas är $s_1 = \dots = s_q = t_1 = \dots = t_k = 0$. Detta visar att Af_1, Af_2, \dots, Af_q är linjärt oberoende, genererar $V(A)$ och därmed är en bas för $V(A)$. ■

Låt M_n beteckna mängden av alla kvadratiska $n \times n$ -matriser.

Sats 4.16. *En $n \times n$ -matris A är inverterbar om och endast om $N(A) = \{0\}$.*

BEVIS: Antag att A är inverterbar. Då följer av Sats 3.8 att ekvationen $Ax = 0$ är ekvivalent med att $x = 0$, d.v.s. $N(A) = \{0\}$.

Omvänt, antag att $N(A) = \{0\}$. Från dimensionssatsen följer att $\dim V(A) = n$, d.v.s. $V(A) = \mathbb{R}^n$. För varje $y \in \mathbb{R}^n$ har vi att det finns ett entydigt $x \in \mathbb{R}^n$ sådant att $Ax = y$. För att visa entydigheten antar vi att x och x' uppfyller att $Ax = Ax' = y$, då följer att $Ax - Ax' = A(x - x') = 0$. Eftersom $N(A) = \{0\}$ följer att $x - x' = 0$ vilket är detsamma som att $x = x'$. Enligt Sats 3.8 är A inverterbar. ■

Sats 4.17. *Låt $A, B \in M_n$. Då följer att $AB = E$ om och endast om $BA = E$.*

BEVIS: Antag att $AB = E$. För varje $y \in \mathbb{R}^n$ har ekvationen $Ax = y$ lösningen $x = By$, ty

$$A(By) = (AB)y = Ey = y. \quad (4.35)$$

Vi har att $V(A) = \mathbb{R}^n$ och från dimensionssatsen att $N(A) = \{0\}$. Från sats 4.16 har vi att A är inverterbar. Alltså gäller att

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B. \quad (4.36)$$

Eftersom B är inversen till A följer att $BA = E$. ■

4.2 Ortonormerade baser

Definition 4.18. Vektorerna u_1, \dots, u_m sägs vara **ortonormerade** om

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}. \quad (4.37)$$

Om vektorerna u_1, \dots, u_m är ortonormerade är de linjärt oberoende. Antag att $s_1 u_1 + \dots + s_m u_m = 0$. Då följer att

$$\begin{aligned} s_j &= (s_j u_j, u_j) = (s_1 u_1, u_j) + \dots + (s_j u_j, u_j) + \dots + (s_m u_m, u_j) \\ &= (s_1 u_1 + \dots + s_m u_m, u_j) = (0, u_j) = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Alltså är alla $s_j = 0$ vilket visar att vektorerna är linjärt oberoende.

Om en bas består av ortonormerade vektorer sägs basen vara **ortonormerad**.

Sats 4.19. *Varje delrum U av \mathbb{R}^n har en ortonormerad bas.*

BEVIS: Antag att U är av dimension n och att u_1, u_2, \dots, u_n är en bas för U . Bilda $v_1 = u_1$ och $v_2 = u_2 + sv_1$. Låt oss bestämma s så att v_1 och v_2 blir ortogonala, d.v.s. $(v_2, v_1) = 0$. Vi har

$$0 = (v_2, v_1) = (u_2 + sv_1, v_1) = (u_2, v_1) + s(v_1, v_1) \quad (4.39)$$

vilket ger att

$$s = -\frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2}. \quad (4.40)$$

Antag att v_m är i det linjära höljet av vektorerna u_1, \dots, u_m för alla $1 \leq m \leq k$ och att v_1, \dots, v_k är parvis ortogonala för ett fixt värde på k . Vi vill visa att vi kan bilda en vektor v_{k+1} i det linjära höljet av vektorerna u_1, \dots, u_{k+1} som är ortogonal mot vektorerna v_1, \dots, v_k . Bilda

$$v_{k+1} = u_{k+1} + s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_n v_n \quad (4.41)$$

och bestäm talen s_i så att $(v_{k+1}, v_i) = 0$. Eftersom v_1, \dots, v_k är ortogonala blir lösningen

$$s_i = -\frac{(u_{k+1}, v_i)}{\|v_i\|^2}. \quad (4.42)$$

Induktion över k ger att vi kan finna vektorer v_1, \dots, v_n som är parvis ortogonala. Bilda slutligen vektorerna

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}. \quad (4.43)$$

Vektorerna w_1, \dots, w_n bildar en ortonormerad bas för U . ■

4.3 Övningar

Övning 4.1. Visa att om A är en $n \times m$ -matris är $N(A)$ ett delrum av \mathbb{R}^m och $V(A)$ ett delrum av \mathbb{R}^n .

Övning 4.2. Kan vektorn $u = (1 \ 2 \ 0 \ -1)^T$ i \mathbb{R}^4 skrivas som en linjär kombination av vektorerna $v = (1 \ 1 \ -2 \ 1)^T$ och $w = (2 \ 1 \ 4 \ 5)^T$.

Övning 4.3. Är vektorerna $u = (1 \ -7 \ 2)^T$, $v = (0 \ 5 \ -2)^T$ och $w = (1 \ 1 \ 1)^T$ linjärt beroende?

Övning 4.4. Antag att de kvadratiske matriserna A och B uppfyller ekvationen $A^2 + AB = E$. Visa att $AB = BA$.

Övning 4.5. Låt delrummet U av \mathbb{R}^4 vara linjära höljet av vektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ortonormerad bas för U .

Övning 4.6. Visa att vektorerna u, v och w definierad i exempel 4.4 bildar en bas för delrummet U givet i exempel 4.2.

5 Sannolikhet och Markovkedjor

I förra kapitlet presenterade vi brytpunktsavståndet och gav en undre gräns för vändningsavståndet mellan två genom. Vi ska nu gå vidare och söka det förväntade antalet operationer som skett mellan två genom på givet brytpunktsavstånd. Vi måste därför introducera slumpartade processer och sannolikhetslära.

5.1 Sannolikheter

Sannolikhetslära handlar om slumpmässiga försök och om hur resultaten av dessa försök kan förväntas uppträda. Vi kallar resultatet av ett slumpmässigt försök för ett **utfall**. Om vi kastar en tärning finns det exempelvis sex möjliga utfall, nämligen värdena 1, 2, 3, 4, 5 och 6.

Sannolikheten för ett utfall kan definieras som kvoten mellan antalet sådana utfall och det totala antalet försök, om man gör väldigt många försök. Om vi kastar en tärning kommer vi få en femma i en sjättedel av fallen, om vi kastar många kast. Därför är sannolikheten för en femma en sjättedel. Summan av sannolikheterna för samtliga utfall ska bli 1.

En **stokastisk variabel** är en funktion som beror av utfallet av ett eller flera slumpmässiga försök. Om vi kastar tärning på ett kasino kommer utfallet vara de två tärningarnas värden, medan en stokastisk variabel till exempel kan ange den vinst man gör på ett kast. Vinsten beror naturligtvis av vilket utfall det blev. Sannolikheter för stokastiska variabler beräknas på liknande sätt som för utfall.

Antag att den stokastiska variabeln X ger icke-negativa heltal som resultat. Vi kan då räkna ut medelvärdet av X efter ett antal försök. Det förväntade medelvärdet, det medelvärde man brukar få efter många försök, kallas **väntevärde**. Med hjälp av sannolikheterna kan vi enkelt räkna ut väntevärdet. Låt p_i beteckna sannolikheten att X antar värdet i efter ett försök. Då kommer väntevärdet $\mathbb{E}(X)$ av X att ges av

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i.$$

Exempel 5.1. Låt X ange resultatet av ett tärningskast (här sammanfaller den stokastiska variabeln X med utfallet av försöket). Väntevärdet blir då

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

▲

5.2 Markovkedjor

Vi tänker oss nu en följd av stokastiska variabler, X_n . Det kan till exempel vara finalresultatet i Eurovisionsschlagerfestivalen (de möjliga utfallen utgörs av alla möjliga ordningar av 24 deltagande länder) eller bokstäverna i en text som skrivs (här utgörs utfallen av alfabetets bokstäver samt skiljetecken och blanksteg). I båda fallen beror sannolikheterna för de olika värdena på X_n av tidigare resultat: i det första fallet genom att de länder som placerade sig dåligt föregående år inte är med i årets final, och i det senare fallet genom att man inte kan kombinera bokstäver hur som helst.

Det finns dock en skillnad mellan de båda fallen. I det första räcker de att veta hur resultatet såg ut för föregående år för att kunna beräkna sannolikheterna för de olika resultatlistorna för årets festival. I det andra fallet måste man ha mer information än bara senaste tecknet. Om det senaste tecknet var **t** kan många bokstäver följa, men om vi vet att de senaste tecknen var **matemat** verkar det troligt att nästa tecken är **i**.

Det första fallet, när all information vi behöver känna till ges av värdet på föregående stokastiska variabel, kallar vi för en **markovkedja**. Det är sådana följder av stokastiska variabler som vi ska studera här. De olika värden som de stokastiska variablerna kan anta kallas **tillstånd**.

Ett sätt att beskriva en markovkedja är med hjälp av en **övergångsmatrix**. Bestäm en ordning för tillstånden. I matrisen svarar första raden och första kolonnen mot första tillståndet, andra raden och kolonnen mot andra tillståndet, och så vidare. Som element på rad i och kolonn j sätter vi sannolikheten p_{ij} att X_{n+1} är tillstånd i om X_n är tillstånd j . Vi säger att vi **går** från tillstånd j till tillstånd i med sannolikhet p_{ij} .

Exempel 5.2. Lisa och Erik går på kasino och spelar roulette. För att öka sina chanser att lämna kasinot med pengar på fickan har de valt var sin strategi för hur de ska satsa.

Båda har bestämt att spela tills de antingen har spelat ihop fem kronor eller förlorat alla pengar. Eriks strategi är att alltid satsa en krona på rött, vilket på detta kasino ger 50 procent sannolikhet att vinna en krona och 50 procent sannolikhet att förlora en krona. Lisa använder en litet mer komplicerad strategi. Hon satsar alla sina pengar på rött, förutsatt att det är meningsfullt. Eftersom hon är nöjd med fem kronor då hon går hem behöver hon inte satsa mer än två kronor om hon har tre kronor och bara en krona om hon har fyra kronor.

Sannolikheterna för den mängd pengar Erik respektive Lisa har efter en omgång beror bara av hur mycket pengar de har innan omgången spelas. Om vi låter antalet kronor Erik äger vara de olika tillstånden kommer alltså hans spelande att utgöra en markovkedja. Även Lisas spelande utgör på samma

sätt en markovkedja. Övergångsmatriserna för dessa kedjor är

$$P_{\text{Erik}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$P_{\text{Lisa}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

▲

En speciell klass av markovkedjor består av dem som har symmetriska övergångsmatriser. Det innebär att sannolikheten att gå till v om vi befinner oss i u är samma som sannolikheten att gå till u om vi befinner oss i v . Vi kallar sådana processer för **symmetriska** markovkedjor.

Av definitionen av markovkedjor ovan ser vi att en rad innehåller samtliga sannolikheter för övergångar från ett givet element. Summan av dessa sannolikheter är 1, så varje rad i matrisen har summan 1. Om matrisen är symmetrisk gäller detta även för kolonnerna.

Antag att vi befinner oss i tillstånd j och att markovkedjans övergångsmatris är $P = (p_{ij})$. Då får vi sannolikheterna att vi efter ett steg i kedjan befinner oss i tillstånd i genom att läsa av element i i vektorn $\mathbf{v}_1 = P\mathbf{e}_j$. Multiplicerar vi den med P från vänster får vi $\mathbf{v}_2 = P\mathbf{v}_1 = P^2\mathbf{e}_j$, som ger sannolikheterna att vi befinner oss i tillstånd i efter två steg. På samma sätt ger $\mathbf{v}_t = P^t\mathbf{e}_j$ sannolikheterna att vi befinner oss i tillstånd i efter t steg, förutsatt att vi började i j . Vektorerna \mathbf{v}_t kallas **tillståndsvektorer**. Man behöver naturligtvis inte börja i något speciellt tillstånd, utan vilken tillståndsvektor som helst duger. Detta är användbart om vi inte vet i vilket tillstånd vi börjar, men vi vet vilka sannolikheterna är för att börja i respektive tillstånd.

Exempel 5.3. Betrakta Erik i föregående exempel. Antag att han anländer till kasinot med två kronor på fikan. Då ges hans initialfördelning av $\mathbf{v}_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Sannolikhetsfördelningen efter tio spelade omgångar ges av $\mathbf{v}_{10} = P_{\text{Erik}}^{10}\mathbf{v}_0$. Med hjälp av en dator räknar man lätt fram att det blir

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{1}{1024} (550 \ 0 \ 89 \ 0 \ 55 \ 330)^T.$$

Då t blir stort går vi mot fördelningen

$$\mathbf{v} = \frac{1}{5} (3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2)^T.$$

Sannolikheten att lämna kasinot med fem kronor är alltså 40 procent.

Om Erik innan han anländer singlar slant med Lisa om en krona blir initialfördelningen $\mathbf{v}_0 = (0 \ 1/2 \ 0 \ 1/2 \ 0 \ 0)^T$. Då förändras även alla \mathbf{v}_t , även om fördelningen för mycket stora t blir densamma i just detta exempel. ▲

5.3 Antalet brytpunkter efter t vändningar

Att beräkna det förväntade antalet brytpunkter efter t vändningar kan tyckas vara svårt, eftersom brytpunkterna kan uppstå och försvinna var som helst längs genomt, men vi kan utnyttja symmetri för att förenkla problemet en del. Genomet är cirkelsymmetriskt: sannolikheten att g_1 följer g_0 är samma som sannolikheten att g_2 följer g_1 , och så vidare. Låt $p_i(t)$ vara sannolikheten att vi har en brytpunkt mellan g_i och g_{i-1} efter t vändningar. Eftersom det förväntade antalet brytpunkter är summan av dessa sannolikheter och eftersom alla dessa sannolikheter är lika får vi att det förväntade antalet brytpunkter är

$$\mathbb{E}_{\text{brp}} = \sum_{i=1}^n p_i(t) = n \cdot p_1(t).$$

Vi behöver alltså bara räkna ut sannolikheten att g_1 följer g_0 .

Tänk nu tillbaka på konstruktionen av genomt som pärlor på en ståltråd. I vänster hand finns g_0 . För att beräkna sannolikheten $p_1(t)$ att g_1 inte följer direkt efter g_0 behöver vi bara hålla reda på var g_1 befinner sig, eftersom g_0 alltid befinner sig i vänster hand.

Vi kan nu införa en markovkedja där tillstånden utgörs av de möjliga positionerna för g_1 och stegen tas genom att utföra en slumpmässigt vald vändning. Det är en markovkedja eftersom sannolikheten att g_1 ska hamna i en viss position efter en vändning beror enbart av vilken position g_1 befinner sig i innan vändningen.

Antalet tillstånd ges av antalet möjliga positioner för genen g_1 . Den kan hamna överallt utom i vänster hand, eftersom g_0 alltid ligger där. Därmed finns $n - 1$ olika positioner tillgängliga, nämligen $1, 2, \dots, n - 1$. Men vi måste också komma ihåg att g_1 kan vändas till $-g_1$ i var och en av dessa positioner. Sammanlagt blir det alltså $2(n - 1)$ olika tillstånd i markovkedjan.

Vi ska nu beräkna övergångsmatrisen. För att välja en vändning väljer vi två gener, som är första genen i var sitt segment. Sedan väljer vi att vända det segment som inte innehåller g_0 . Antalet vändningar ges alltså av antalet sätt att välja två olika gener bland n gener, det vill säga $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Vi beräknar övergångsmatrisen genom att för varje par av tillstånd beräkna antalet vändningar som flyttar g_1 från det ena tillståndet till det andra, och sedan dela med det totala antalet vändningar. På det sättet får vi de korrekta sannolikheterna. Vi kallar övergångsmatrisen för P_n och multiplicerar vi den med $\binom{n}{2}$ får vi K_n . Vi har alltså $P_n = \frac{K_n}{\binom{n}{2}}$.

Vi kallar tillstånden $m_1, -m_1, m_2, -m_2, \dots, m_{n-1}, -m_{n-1}$, där m_i svarar mot att g_1 finns på position i och $-m_i$ innebär att $-g_1$ finns på position i . Det finns inga vändningar som flyttar g_1 mellan två olika tillstånd med samma tecken, eftersom en vändning alltid byter tecken på de gener som vänds. Däremot finns vändningar mellan m_j och $-m_i$. Då ska vändningen inkludera positionerna j till i , och det ska vara lika många positioner innan j som efter i , om $j \leq i$. Dessutom får inte m_0 inkluderas. Därmed har vi i detta fall att antalet möjliga vändningar är $\min\{j, n - j\}$. Om man även tar hänsyn till fallet $i \leq j$ får vi antalet vändningar till

$$\min\{i, j, n - i, n - j\}.$$

Slutligen har vi fallet då g_1 inte byter tillstånd. Det innebär att vändningen inte innehåller g_1 . Vändningen måste då få plats mellan g_0 och g_1 , och antalet sådana vändningar beror på avståndet mellan g_0 och g_1 . Räknar vi på antalet sätt att välja två positioner mellan position 0 och den position i som g_1 befinner sig på får vi

$$\binom{i}{2} + \binom{n-i}{2}.$$

Dessa beräkningar ger alla positioner i övergångsmatrisen.

Exempel 5.4. Vi beräknar övergångsmatrisen för $n = 4$. På diagonalen har vi formeln

$$\binom{i}{2} + \binom{4-i}{2}.$$

Det finns tre möjliga värden på i , nämligen 1, 2 och 3. Om $i = 1$, vilket svarar mot de första två kolonnerna i matrisen, så får vi $\binom{1}{2} + \binom{3}{2} = 0 + 3 = 3$. Samma sak får vi för $i = 3$, vilket ger värdena på de sista två kolonnerna i matrisen. På de mittersta kolonnerna får vi slutligen $\binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 1 + 1 = 2$.

Utanför diagonalen får vi noll om raden och kolonnen båda är udda eller båda är jämna. I annat fall gäller formeln

$$\min\{i, j, 4 - i, 4 - j\}.$$

När i eller j är ett eller tre får vi då 1, och i mitten där både i och j är två får vi 2.

Sätter vi samman alla dessa beräkningar får vi

$$K_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

▲

Slutligen har det blivit dags att ställa upp en formel för hur vi beräknar det förväntade antalet brytpunkter efter t vändningar. Vi såg tidigare att

$$\mathbb{E}_{\text{brp}} = \sum_{i=1}^n p_i(t) = n \cdot p_1(t).$$

Vi måste alltså beräkna $p_1(t)$. Eftersom vi startar med identitetsgenomet vet vi att g_1 börjar i första tillståndet m_1 . Det svarar mot tillståndvektorn $e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$. Sedan applicerar vi övergångsmatrisen t gånger, vilket är multiplikation från höger. Vi får alltså $P_n^t e_1$. I denna vektor ger första positionen sannolikheten att g_1 följer direkt efter g_0 , det vill säga att vi inte har en brytpunkt. Alltså är $e_1^T P_n^t e_1$ sannolikheten att vi efter t vändningar inte har en brytpunkt, så vi får

$$\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t) = n \cdot p_1(t) = n \left(1 - e_1^T P_n^t e_1 \right) = n \left(1 - \frac{e_1^T K_n^t e_1}{\binom{n}{2}^t} \right).$$

5.4 Övningar

Övning 5.1. Om Erik och Lisa har två kronor var när de anländer till kasinot och spelar tre omgångar, vem har största sannolikhet för att ha fem kronor? Vem har störst sannolikhet för att ha noll kronor?

Övning 5.2. Hur är sannolikheterna att Erik och Lisa har fem kronor efter lång tid, om de startar med tre kronor?

Övning 5.3. Beräkna $\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t)$ för $n = 2$.

Övning 5.4. Beräkna matriserna K_5 och K_6 . Hur stor är sannolikheten att vi inte har en brytpunkt mellan g_0 och g_1 efter $t = 3$ steg om $n = 4$?

Övning 5.5. Beräkna övergångsmatrisen om operationerna är förflyttningar. Tänk på att vi inte behöver lika många tillstånd, eftersom förflyttningar aldrig ändrar tecken på generna.

6 Determinanter

6.1 Definitionen

Vi vill definiera en funktion $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$, från mängden av kvadratiska matriser till de reella talen. För varje kvadratisk matris A vill vi använda följande beteckningar för $\det A$:

$$\det A = \det(A_1, \dots, A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.1)$$

där A_1, \dots, A_n är kolonnerna till $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Funktionen \det skall uppfylla följande egenskaper:

(I) $\det A$ beror linjärt på varje kolonn, d.v.s. att

$$\det(\dots, A_i' + A_i'', \dots) = \det(\dots, A_i', \dots) + \det(\dots, A_i'', \dots) \quad (6.2)$$

och

$$\det(\dots, sA_i, \dots) = s \det(\dots, A_i, \dots) \quad (6.3)$$

för alla i och alla $s \in \mathbb{R}$.

(II) $\det A = 0$ om två kolonner i A är lika.

(III) $\det E = 1$.

Lemma 6.1. *Från egenskaperna (I) och (II) följer egenskaperna*

(IV) $\det A$ byter tecken om två kolonner byter plats.

(V) $\det A$ ändras inte om man lägger en multipel av en kolonn till en annan kolonn.

BEVIS: Vi ska nu visa att egenskaperna (IV) och (V) följer av (I) och (II). Enligt (I) och (II) följer att

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots) & (6.4) \\ &= \det(\dots, A_i, \dots, A_i + A_j, \dots) + \det(\dots, A_j, \dots, A_i + A_j, \dots) \\ &= \det(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) + \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) \\ &\quad + \det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) + \det(\dots, A_j, \dots, A_j, \dots) \\ &= \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) + \det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots), \end{aligned}$$

vilket ger (IV). Villkoret (I) medför att

$$\begin{aligned} \det(\dots, A_i + sA_j, \dots, A_j, \dots) &= \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) & (6.5) \\ &\quad + s \det(\dots, A_j, \dots, A_j, \dots) \\ &= \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots). \end{aligned}$$

Detta är egenskapen (V), och vi har visat lemmat. ■

Exempel 6.2. Låt oss beräkna en godtycklig determinant då $n = 2$. Antag att $d \neq 0$, av (I), (III) och (V) följer att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a - \frac{c}{d}b & b \\ c - \frac{c}{d}d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{ad-bc}{d} & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \frac{ad-bc}{d} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\ &= \frac{ad-bc}{d} \begin{vmatrix} 1 & b - b \cdot 1 \\ 0 & d - b \cdot 0 \end{vmatrix} = \frac{ad-bc}{d} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} \\ &= (ad-bc) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad-bc. \end{aligned}$$

Antag nu att $d = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} &= b \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} \\ &= bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -bc \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -bc. \end{aligned}$$

Alltså

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (6.6)$$

▲

Lemma 6.3. Låt funktionen $D : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ uppfylla egenskaperna (I), (II) och egenskapen $D(E) = 0$. Då följer att $D(A) = 0$ för alla $A \in M_n$.

BEVIS: Låt $A \in M_n$ och låt E_1, E_2, \dots, E_n vara kolonnerna i enhetsmatrisen. Då följer att varje kolonnvektor i A kan skrivas som

$$A_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} E_j. \quad (6.7)$$

Upprepad användning av (6.7) och (I) ger

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A_1, A_2, \dots, A_n) = D\left(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1 1} E_{j_1}, A_2, \dots, A_n\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n a_{j_1 1} D(E_{j_1}, A_2, \dots, A_n) = \sum_{j_1=1}^n a_{j_1 1} D\left(E_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{j_2 2} E_{j_2}, \dots, A_n\right) \\ &= \dots = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} D(E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

För att visa att $D(A) = 0$, räcker det med att visa att $D(E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n})$ alltid är noll. Om två j :n är lika är $D(E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}) = 0$ på grund av egenskap

(II). Antag därför att alla $j:n$ är skilda. Vi har tidigare sett att om D uppfyller egenskaperna (I) och (II) uppfyller D även (IV). Av egenskap (IV) följer att $D(E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n})$ är detsamma som $D(E)$ eller $-D(E)$, vilka båda är noll. Alltså är $D(A) = 0$ för alla kvadratiska matriser A . ■

Lemma 6.4. *Det finns högst en funktion $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller egenskaperna (I) - (III).*

BEVIS: Antag först att det finns två stycken funktioner D_1 och D_2 som uppfyller egenskaperna (I) - (III). Definiera funktionen $D : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $D(A) = D_1(A) - D_2(A)$. Funktionen D uppfyller (I) ty

$$\begin{aligned} D(\dots, A'_i + A''_i, \dots) &= D_1(\dots, A'_i + A''_i, \dots) - D_2(\dots, A'_i + A''_i, \dots) \\ &= D_1(\dots, A'_i, \dots) + D_1(\dots, A''_i, \dots) \\ &\quad - D_2(\dots, A'_i, \dots) - D_2(\dots, A''_i, \dots) \\ &= D(\dots, A'_i, \dots) + D(\dots, A''_i, \dots). \end{aligned} \quad (6.9)$$

och

$$\begin{aligned} D(\dots, sA_i, \dots) &= D_1(\dots, sA_i, \dots) - D_2(\dots, sA_i, \dots) \\ &= sD_1(\dots, A_i, \dots) - sD_2(\dots, A_i, \dots) \\ &= sD(\dots, A_i, \dots). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Egenskap (II) är uppfyllt för D ty antag att två kolonner i A är lika. Då följer att $D_1(A) = 0$ och $D_2(A) = 0$, därmed även att $D(A) = D_1(A) - D_2(A) = 0$. Däremot är $D(E) = D_1(E) - D_2(E) = 1 - 1 = 0$. Av Lemma 6.3 följer att $D(A) = 0$ för alla kvadratiska matriser A vilket ger att $D_1(A) = D_2(A)$ för alla kvadratiska matriser A . ■

Lemma 6.5. *Det finns en funktion $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller egenskaperna (I) - (III). För $n = 1$ har vi att $\det(a_{11}) = a_{11}$ och för $n > 1$ ges funktionen av*

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} a_{mj} \det[A]_{mj} \quad (6.11)$$

där, $[A]_{ij}$ betecknas den $(n-1) \times (n-1)$ -matris som fås då rad i och kolonn j tas bort i matrisen A och m är ett godtyckligt tal sådant att $1 \leq m \leq n$.

BEVIS: Vi använder ett induktionsbevis. För $n = 1$ gäller att $\det(a) = a$. Antag att determinanten redan är definierad för $(n-1) \times (n-1)$ -matriser så att (I)-(III) gäller. Låt A vara en $n \times n$ -matris och definiera $\det A$ enligt (6.11). Egenskaperna (I)-(III) måste verifieras. För att visa att (6.11) beror linjärt på kolonn p räcker det med att visa att varje term

$$(-1)^{m+j} a_{mj} \det[A]_{mj} \quad (6.12)$$

beror linjärt på kolonn p .

Om $j \neq p$ beror inte a_{mj} på kolonn p och $\det[A]_{mj}$ beror linjärt på alla sina kolonner, ty $\det[A]_{mj}$ är en $(n-1)$ -determinant som enligt antagandet uppfyller (I). Alltså beror $(-1)^{m+j} a_{mj} \det[A]_{mj}$ linjärt på kolonn p i fallet $j \neq p$.

Antag nu att $j = p$. Då beror inte $\det[A]_{mp}$ på kolonn p och a_{mp} beror linjärt på p . Detta visar att varje term och därför summan (6.11) beror linjärt på sina kolonner.

Vi vill visa egenskap (II). Vi börjar med att visa att

(II b) om två närliggande kolonner i A är lika är $\det A = 0$.

För att visa att (6.11) uppfyller (II b) antar vi att kolonnerna A_p och A_{p+1} är lika. Determinanten $[A]_{mj}$ har två lika kolonner för alla värden på j utom för $j = p$ och $j = p + 1$. Eftersom (II) gäller för $(n-1)$ -determinanter blir (6.11)

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} a_{mj} \det[A]_{mj} \\ &= (-1)^{m+p} a_{mp} \det[A]_{mp} + (-1)^{m+p+1} a_{m(p+1)} \det[A]_{m(p+1)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Här ser vi att $(-1)^{m+p}$ och $(-1)^{m+p+1}$ har skilda tecken, $a_{mp} = a_{m(p+1)}$ och $\det[A]_{mp} = \det[A]_{m(p+1)}$. Alltså $\det A = 0$. Detta visar egenskap (II b)

På liknande vis som vi visade (IV) från (I) och (II) kan vi visa från (I) och (II b) att

(IV b) om två närliggande kolonner i A byter plats byter $\det A$ tecken.

Antag att två kolonner i A sammanfaller och att (I) och (II b) gäller. Genom successiv användning av (IV b) kan vi få att de lika kolonnerna hamnar bredvid varandra. Enligt (II b) är $\det A = 0$, vilket ger att (II) gäller.

Slutligen för att visa (III) inser vi att för varje val av m är det endast en term i summan (6.11) som är skild från noll. Detta inträffar då $j = m$ och $e_{mm} = 1$ samt $(-1)^{m+m} = 1$. Vi får att

$$\det E_n = \det[E]_{mm} = 1, \quad (6.14)$$

ty $[E]_{mm} = E_{n-1}$. Induktion över n ger att (6.11) uppfyller (I)-(III) för alla värden av n och m . Lemma 6.4 säger att det finns endast en funktion som uppfyller (I)-(III). Detta visar att (6.11) ger samma värde oavsett värdet på m . ■

Sats 6.6. *Det finns en och endast en funktion $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller egenskaperna (I) - (III).*

BEVIS: Kombinera Lemma 6.4 och Lemma 6.5. ■

6.2 Egenskaper

Sats 6.7. *Låt A vara en $n \times n$ -matris. Då följer att*

$$\det A = \det A^T. \quad (6.15)$$

BEVIS: Bilda funktionen $D(A) = \det A^T$. Vi är enligt Lemma 6.4 klara om vi visar att D uppfyller egenskaperna (I)-(III).

Funktionen $D(A)$ är linjär i kolonnerna om och endast om $\det A$ är linjär i raderna. Vi visar att $\det A$ är linjär i raderna. Låt $\mathbf{a}_{mj} = \mathbf{a}'_{mj} + \mathbf{a}''_{mj}$, där $j = 1, \dots, n$. Då följer att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} \mathbf{a}_{mj} \det[A]_{mj} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} \mathbf{a}'_{mj} \det[A]_{mj} + \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} \mathbf{a}''_{mj} \det[A]_{mj} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}'_{m1} & \cdots & \mathbf{a}'_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}''_{m1} & \cdots & \mathbf{a}''_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Låt s vara ett tal då följer att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s\mathbf{a}_{m1} & s\mathbf{a}_{m2} & \cdots & s\mathbf{a}_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} s\mathbf{a}_{mj} \det[A]_{mj} \\ &= s \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} \mathbf{a}_{mj} \det[A]_{mj} = s \det A, \end{aligned} \quad (6.17)$$

vilket visar att $\det A$ är linjär i raderna. Alltså (I) gäller för D .

För att visa att (II) gäller för D visar vi det ekvivalenta påståendet att $\det A = 0$ om två rader i A är lika. Vi använder induktion över n . I fallet $n = 2$ gäller att om två rader är lika är determinanten noll, ty

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 0. \quad (6.18)$$

Antag att varje $(n-1)$ -determinant där två rader är lika är noll. Låt A vara en $n \times n$ -matris där två rader är lika. Vi **utvecklar** determinanten längs en av de andra raderna än de som sammanfaller. Vi får

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{m+j} a_{mj} \det[A]_{mj} = 0, \quad (6.19)$$

ty varje determinant $\det[A]_{mj}$ är av ordning $n-1$ och har två rader som är lika. Induktionsbeviset är klart.

Det är klart att $D(E) = \det E^T = \det E = 1$.

Från Sats 6.4 har vi att $D(A) = \det A$, vilket visar att $\det A^T = \det A$. ■

Sats 6.8. *Låt A och B vara två $n \times n$ -matriser. Då följer att*

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (6.20)$$

BEVIS: Fixera matrisen A och definiera funktionerna $D_1(B) = \det(AB)$ och $D_2(B) = \det A \det B$ definierade för alla kvadratiska matriser B . Från definitionen av matrismultiplikation ser vi att AB har kolonnerna AB_1, AB_2, \dots, AB_n , där B_1, B_2, \dots, B_n är kolonnerna i B . Detta ger att om två kolonner i B är lika följer att två kolonner i AB är lika och därmed är $D_1(B) = \det(AB) = 0$. Alltså stämmer (II) för D_1 . Eftersom $\det(AB_1, AB_2, \dots, AB_n)$ är linjär i sina kolonner och eftersom distributiva lagen (3.12) gäller för matriser är även D_1 linjär i sina kolonner, vilket ger (I) för D_1 . Funktionen D_2 uppfyller egenskaperna (I) och (II) ty $\det A$ är ett reellt tal. Vi har dessutom att

$$D_1(E) - D_2(E) = \det(AE) - \det A \det E = \det A - \det A = 0. \quad (6.21)$$

Bilda $D : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $D(B) = D_1(B) - D_2(B)$. Eftersom D uppfyller (I), (II) och att $D(E) = 0$ följer att $D(B) = 0$ för alla kvadratiska matriser B , vilket är detsamma som att $D_1(B) = D_2(B)$. ■

Sats 6.9. *Låt E vara identitetsmatrisen och A en godtycklig kvadratisk matris. Vi har följande identitet*

$$\det(A)E = A \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det[A]_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} \det[A]_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det[A]_{1n} & \cdots & (-1)^{n+n} \det[A]_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

BEVIS: Observera att

$$(-1)^{k+1} a_{k1} \det[A]_{m1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det[A]_{mn} = 0 \quad (6.23)$$

om $k \neq m$. Ty antag att A' är matrisen A förutom att vi har ersatt rad m i A med rad k i A . Eftersom A' har två lika rader är $\det A' = 0$. Utveckling av A' längs rad m ger

$$\det A' = (-1)^{k+1} a_{k1} \det[A]_{m1} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det[A]_{mn} = 0. \quad (6.24)$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \det[A]_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} \det[A]_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det[A]_{1n} & \cdots & \det[A]_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A) E. \end{aligned} \quad (6.25)$$

vilket vi skulle visa. ■

Sats 6.10. *Låt A vara en kvadratisk matris. Då gäller att A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. Om A är inverterbar följer att*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (6.26)$$

och

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det[A]_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} \det[A]_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det[A]_{1n} & \cdots & (-1)^{n+n} \det[A]_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

BEVIS: Antag att A är inverterbar. Då följer av Sats 6.8 att

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}. \quad (6.28)$$

Här följer att $\det A \neq 0$ och att (6.26) gäller.

Antag att $\det A \neq 0$. Av Sats 6.9 har vi att

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det[A]_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} \det[A]_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det[A]_{1n} & \cdots & (-1)^{n+n} \det[A]_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

■

6.3 Övningar

Övning 6.1. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

Övning 6.2. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Övning 6.3. Visa att

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Övning 6.4. Visa att följande determinant av ordning n uppfyller att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = n.$$

7 Egenvärden och egenvektorer

En $n \times n$ -matris innehåller n^2 element. Det är svårt att direkt ur dessa se vad matrisen har för egenskaper. Vi ska i detta kapitel titta på några tal, kallade egenvärden, som trots att de inte är så många beskriver matrisens egenskaper väl.

7.1 Egenvärden och egenvektorer

Definition 7.1. Låt A vara en $n \times n$ -matris. Ett tal λ sägs vara ett **egenvärde** till A om det finns en vektor $u \neq 0$ sådan att

$$Au = \lambda u. \quad (7.1)$$

Vektorn u sägs vara en **egenvektor** till A med egenvärdet λ .

Antag att A är en kvadratisk matris. Låt oss undersöka vilka egenvärden matrisen A kan ha. Ekvationen

$$Au = \lambda u \quad (7.2)$$

är ekvivalent med

$$Au - \lambda u = Au - \lambda E u = (A - \lambda E)u = 0. \quad (7.3)$$

Enligt sats 4.16 är matrisen $A - \lambda E$ inverterbar om och endast om $u = 0$ är den enda lösningen till ekvationen $(A - \lambda E)u = 0$. Vi vill finna lösningar u som är skilda från nollvektorn. Detta gör vi enligt sats 4.16 om och endast om $A - \lambda E$ ej är inverterbar, vilket inträffar om och endast om

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (7.4)$$

Denna ekvation kallas den **karaktäristiska ekvationen** för matrisen A och polynomet $\det(A - \lambda E)$ det **karaktäristiska polynomet** för matrisen A .

7.2 Beräkning av egenvärden

Exempel 7.2. Låt oss undersöka egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Vi vill finna rötter till den karaktäristiska ekvationen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 6 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 6(-2) \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Löser vi andragsradsekvationen får vi lösningarna $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$.

Vi vill även finna egenvektorer till egenvärdena. Vi börjar med $\lambda_1 = 1$. Vi vill lösa ekvationen $A\mathbf{u} = 1\mathbf{u}$ eller $(A - E)\mathbf{u} = 0$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4u_1 + 6u_2 = 0 \\ -2u_1 + -3u_2 = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

som är ekvivalent med ekvationen

$$2u_1 + 3u_2 = 0. \quad (7.8)$$

Ansätt $u_2 = 2t$, där t är ett godtyckligt reellt tal. Vi får då att $u_1 = -3t$. Vi har då att egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 1$ är $(-3t \ 2t)^T$, för nollskilda tal t .

Vektorn \mathbf{v} är en egenvektor till A med egenvärdet $\lambda_2 = 2$ om $(A - 2E)\mathbf{v} = 0$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3v_1 + 6v_2 = 0 \\ -2v_1 + -4v_2 = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

vilket är ekvivalent med ekvationen

$$v_1 + 2v_2 = 0. \quad (7.10)$$

Ansätt $v_2 = t$, där t är ett godtyckligt reellt tal. Vi får då att $v_1 = -2t$, vilket ger egenvektorna $\mathbf{v} = (-2t \ t)^T$, där $t \neq 0$. \blacktriangle

7.3 Egenvärden för våra övergångsmatriser

Vi kommer att i nästa kapitel se att vi har nytta av egenvärdena till K_n . Det är inte svårt att beräkna egenvärdena till K_n för något specifikt värde på n , men vi skulle vilja säga något om egenvärdena till K_n för **alla** n . Vi ska därför titta på några enkla fall och se om vi kan göra några gissningar angående egenvärdena till K_n .

Först och främst kan vi beräkna största egenvärdet till K_n med hjälp av följande sats.

Sats 7.3. *Största egenvärdet till en övergångsmatrix är 1. Dess egenrum har dimension 1 och en egenvektor till detta egenvärde är $(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$.*

BEVIS: Vi visar först att $(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ är en egenvektor med 1 som egenvärde till övergångsmatrisen P , och sedan att P inte kan ha några större egenvärden, och inte heller några andra egenvektorer till egenvärdet 1.

Vi hävdar att vektorn $\mathbf{v} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ är en egenvektor med egenvärdet 1. Vi har nämligen på position i att

$$(P\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j = \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Vi använde här att $v_j = 1$ för alla j samt att radsummorna i P är 1. Därmed är \mathbf{v} en egenvektor med egenvärde 1.

Betrakta nu en godtycklig egenvektor \mathbf{v} med minst ett positivt element. Låt i vara positionen för det största elementet. Vi får då

$$\lambda \cdot v_i = (P\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j \leq \sum_{j=1}^n p_{ij}v_i = v_i \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \cdot v_i.$$

Egenvärdet λ måste därför vara mindre än eller lika med 1. Det kan alltså inte finnas några större egenvärden. ■

Följdsats 7.4. *Det största egenvärdet till K_n är $\binom{n}{2}$.*

BEVIS: Eftersom $K_n = \binom{n}{2}P_n$ och P_n är en övergångsmatrix följer att det största egenvärdet ges av egenvektorn $\mathbf{v} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$. Vi får

$$(K_n\mathbf{v})_i = \left(\binom{n}{2}P_n\mathbf{v} \right)_i = \binom{n}{2} \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j = \binom{n}{2} \sum_{j=1}^n p_{ij} = \binom{n}{2}.$$

■

Att beräkna övriga egenvärden verkar svårare. Vi tittar på några exempel för att få idéer.

Exempel 7.5. De enklaste fallen, $n = 2$ och $n = 3$, överlåtes på läsaren att beräkna egenvärdena till. För $n = 3$ kan det vara lämpligt att använda dator eller miniräknare som klarare sådan beräkning.

För de närmaste följande värdena på n har vi låtit en dator beräkna egenvärdena. För $n = 4$ har vi matrisen

$$K_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\{6, 3, 3, 3, 2, -1\}$. Vidare har vi även

$$K_5 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

med egenvärdena $\{10, 6, 6, 6, 4.8284, 4, 4, -0.8284\}$ och

$$K_6 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 7 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

med egenvärdena $\{15, 10, 10, 10, 8.7392, 7, 7, 7, 5.7759, -0.5151\}$.

Vi ser att det största egenvärdet stämmer överens med satsen ovan. ▲

Av exemplen ser vi att många av egenvärdena är heltal, och några av dessa är till och med binomialkoefficienter. Med ledning av exemplet gör vi följande förmodan.

Förmodan 1. Näst största egenvärdet till K_n är $\binom{n-1}{2}$.

7.4 Övningar

Övning 7.1. Visa att om u är en egenvektor till A med egenvärdet λ så är u en egenvektor till A^2 med egenvärdet λ^2 .

Övning 7.2. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Övning 7.3. Egenvärdena till K_7 är

$$\{21, 15, 15, 15, 13.6767, 11, 11, 11, 9.3789, 9, 9, -0.0546\}$$

och egenvärdena till K_8 är

$$\{28, 21, 21, 21, 19.6285, 16, 16, 16, 14.1581, 13, 13, 13, 11.6604, 0.5530\}$$

Jämför heltalsegenvärdena med binomialkoefficienterna i Pascals triangel. Vilken formel verkar lämplig för det tredje största heltalsegenvärdet? Vad blir formeln för det fjärde största heltalsegenvärdet? Gissa en formel för samtliga heltalsegenvärden för $n \geq 5$?

8 Diagonalisering av matriser

Symmetriska matriser som K_n kan skrivas som en produkt av tre matriser som ges av egenvärden och egenvektorer. Detta kan tyckas komplicera våra beräkningar, men har i själva verket en positiv effekt, eftersom det blir enkelt att beräkna potenser av K_n .

8.1 Diagonalisering

Definition 8.1. En kvadratisk matris $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ sägs vara **diagonal** om $d_{ij} = 0$ då $i \neq j$.

Definition 8.2. En matris P sägs vara **ortogonal** om $P^{-1} = P^T$.

Låt P vara en ortogonal matris. Då följer att

$$(Pu, Pv) = (Pu)^T Pv = u^T P^T Pv = u^T v = (u, v). \quad (8.1)$$

Lemma 8.3. Låt $P \in M_n$. Då är följande ekvivalent:

- (I) Matrisen P är ortogonal.
- (II) Kolonnvektorerna i P är ortonormerade.
- (II) Radvektorerna i P är ortonormerade.

BEVIS: Antag att Matrisen P är ortogonal. Då följer att $P^T P = P^{-1} P = E$, d.v.s. om P_i är kolonnvektorerna i P följer att

$$P^T P = \begin{pmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{pmatrix} (P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n) = \begin{pmatrix} P_1^T P_1 & P_1^T P_2 & \cdots & P_1^T P_n \\ P_2^T P_1 & P_2^T P_2 & \cdots & P_2^T P_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n^T P_1 & P_n^T P_2 & \cdots & P_n^T P_n \end{pmatrix} = E. \quad (8.2)$$

Detta visar att P_i alla är av längd ett och att de är parvis ortogonala. Omvändningen följer också av formel (8.2). Om man studerar $PP^T = E$ istället för $P^T P = E$ följer att radvektorerna i P är ortonormerade om och endast om P är ortogonal. ■

Definition 8.4. En kvadratisk matris A sägs vara **diagonaliserbar** om det finns en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $D = P^{-1}AP$. Om P kan väljas som en ortogonal matris sägs A vara **ortogonalt diagonaliserbar**. Då är $D = P^T A P$ och $A = P D P^T$.

Om en matris A är diagonaliserbar så att $A = P D P^{-1}$ följer att vi kan enkelt beräkna positiva heltalspotenser av A . Låt m vara ett positivt heltal, då följer

att

$$\begin{aligned} A^m &= \left(PDP^{-1} \right)^m = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} \\ &= PD^mP^{-1}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

För en diagonalmatris D är det enkelt att beräkna potenser

$$D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^m \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Sats 8.5. *Symmetriska matriser har endast reella egenvärden.*

BEVIS: [Kräver kunskap om komplexa tal] Låt oss utvidga våra matriser, vektorer och vår skalärprodukt till komplexa tal. Addition och multiplikation för matriser och vektorer blir som tidigare. Låt $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ och $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^T$, där u_i och v_i är komplexa tal. Vi definierar skalärprodukten mellan \mathbf{u} och \mathbf{v} som det komplexa talet

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (8.5)$$

där $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)^T$ och \bar{v}_i är Konjugatet till v_i . Vi ser att om s är ett komplext tal får vi att

$$(s\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (s\mathbf{u})^T \cdot \bar{\mathbf{v}} = s(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}) = s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (8.6)$$

medan

$$(\mathbf{u}, s\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot \overline{s\mathbf{v}} = \bar{s}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}) = \bar{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (8.7)$$

Låt λ vara ett egenvärde till en symmetrisk matris A med egenvektor \mathbf{u} . Vi vill visa att λ är ett reellt tal. Vi har att

$$\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = \bar{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (8.8)$$

Detta ger att

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\lambda - \bar{\lambda})\|\mathbf{u}\|^2 = 0. \quad (8.9)$$

Eftersom $\mathbf{u} \neq 0$ har vi att $\lambda = \bar{\lambda}$ vilket är detsamma som att säga att λ är ett reellt tal. ■

Sats 8.6. *Varje $n \times n$ -matris har minst ett egenvärde.*

BEVIS: Det följer av algebrans fundamentalsats som finns i appendix att n :te gradsekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ har en rot. ■

Sats 8.7 (Spektralsatsen). *Varje symmetrisk matris A är ortogonalt diagonaliserbar.*

BEVIS: Vi ska använda induktion över n . Då $n = 1$ är det klart, ty matrisen (a_{11}) är en diagonal matris.

Antag nu att satsen är sann för symmetriska $(n - 1) \times (n - 1)$ -matriser. Eftersom A är symmetrisk har A enligt Sats 8.5 endast reella egenvärden. Låt λ_1 vara ett egenvärde till A och låt u_1 vara en tillhörande egenvektor av längden 1. Av sats 4.9 och sats 4.19 följer att vektorn u_1 kan kompletteras med vektorerna u_2, \dots, u_n så att de bildar en ortonormerad bas för \mathbb{R}^n . Matrisen P med kolonnerna u_1, u_2, \dots, u_n är en ortogonal matris och matrisen P^TAP har vektorn $(\lambda_1, 0, \dots, 0)$ i första kolonnen, ty

$$P^TAP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P^T A u_1 = \lambda_1 P^T u_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} (u_1, u_1) \\ (u_2, u_1) \\ \vdots \\ (u_n, u_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Det är klart att matrisen P^TAP är symmetrisk. Därmed finns en matris B sådan att

$$P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Eftersom P^TAP är symmetrisk är B en symmetrisk matris. Enligt induktionsantagandet finns det en ortogonal $(n - 1) \times (n - 1)$ -matris Q sådan att Q^TBQ är en diagonalmatris. Vi definierar nu matrisen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad (8.12)$$

som är en ortogonal matris, och låter slutligen

$$D = (PR)^T A (PR) = R^T (P^TAP) R \quad (8.13)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q^TBQ \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Matrisen D är en diagonalmatris eftersom Q^TBQ är en diagonalmatris och matrisen PR är ortogonal ty $(PR)^T PR = R^T P^T PR = R^T R = E$. ■

8.2 Diagonalisering av matriser i vår beräkning

Om man utför en vändning, och sedan vänder samma segment en gång till, så får man tillbaka det genom man startade med. Vi kan nu använda detta till att visa att matriserna K_n är symmetriska.

Lemma 8.8. *Matriserna K_n är symmetriska.*

BEVIS: Vi ska visa att antalet vändningar som flyttar g_1 från ett tillstånd m_j till ett tillstånd m_i är lika många som antalet vändningar som flyttar g_1 från m_i till m_j . Vi kallar det första antalet A_{ij} och det andra A_{ji} . Eftersom två likadana vändningar tar ut varandra så kommer varje vändning som flyttar g_1 från m_j till m_i också att flytta g_1 från m_i till m_j . Därmed vet vi att $A_{ij} \geq A_{ji}$. Men resonerar vi likadant åt andra hållet ser vi att $A_{ji} \geq A_{ij}$, och sammantaget får vi $A_{ij} = A_{ji}$, vilket var vad vi skulle visa.

Alternativt kan vi inse detta direkt genom att betrakta elementen i matrisen. Det enda nollskilda elementen utanför diagonalen ges av $\min\{i, j, n - i, n - j\}$, vilket är en funktion som är symmetrisk i i och j . ■

Vi kan alltså diagonalisera matriserna K_n enligt beskrivningen tidigare i detta kapitel. Skriver vi $K_n = V_n^T D_n V_n$ där D_n är en diagonalmatrix får vi

$$\begin{aligned} E_{\text{brp}}(n, t) &= n \left(1 - \frac{\mathbf{e}_1^T K_n^t \mathbf{e}_1}{\binom{n}{2}^t} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{\mathbf{e}_1^T (V_n^T D_n V_n)^t \mathbf{e}_1}{\binom{n}{2}^t} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{\mathbf{e}_1^T V_n^T D_n^t V_n \mathbf{e}_1}{\binom{n}{2}^t} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{(V_n \mathbf{e}_1)^T D_n^t V_n \mathbf{e}_1}{\binom{n}{2}^t} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{\mathbf{v}_n^T D_n^t \mathbf{v}_n}{\binom{n}{2}^t} \right), \end{aligned}$$

där vektorn $\mathbf{v}_n = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n-2})^T$ är första kolonnen i V_n , det vill säga det första elementet i respektive egenvektor till K_n .

Exempel 8.9. Vi betraktar fallet $n = 4$. Det är ett rätt så enkelt fall, eftersom det bara finns 48 olika genom och 6 olika vändningar.

Matrisen K_4 ges av

$$K_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Den kan diagonaliseras till $K_4 = V_4^T D_4 V_4$ med matriserna

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

och

$$V_4 = \begin{pmatrix} 0.2887 & -0.2887 & 0.5774 & -0.5774 & 0.2887 & -0.2887 \\ 0.4082 & -0.4082 & -0.4082 & 0.4082 & 0.4082 & -0.4082 \\ 0.7071 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7071 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7071 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7071 \\ 0.2887 & 0.2887 & -0.5774 & -0.5774 & 0.2887 & 0.2887 \\ 0.4082 & 0.4082 & 0.4082 & 0.4082 & 0.4082 & 0.4082 \end{pmatrix}.$$

Vektorn \mathbf{v}_4 är första kolonnen i V_4 och ges alltså av

$$\mathbf{v}_4 = V_4 \mathbf{e}_1 = (0.2887 \quad 0.4082 \quad 0.7071 \quad 0.0 \quad 0.2887 \quad 0.4082)^T.$$

Vi kan nu beräkna $\mathbf{v}_4^T D_4^t \mathbf{v}_4$. Eftersom D_4 är en diagonalmatris kan vi flytta in exponenten till elementen på diagonalen. Vi får

$$D_4^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} (-1)^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6^t \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$D_4^t \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} (-1)^t \cdot 0.2887 \\ 2^t \cdot 0.4082 \\ 3^t \cdot 0.7071 \\ 3^t \cdot 0 \\ 3^t \cdot 0.2887 \\ 6^t \cdot 0.4082 \end{pmatrix}$$

och därmed

$$\mathbf{v}_4^T D_4^t \mathbf{v}_4 = 0.4082^2 \cdot 6^t + (0.7071^2 + 0^2 + 0.2887^2) \cdot 3^t + 0.4082^2 \cdot 2^t + 0.2887^2 \cdot (-1)^t.$$

Det förväntade antalet brytpunkter efter t vändningar ges således av

$$E_{\text{brp}}(4, t) = 4 \left(1 - \frac{0.1667 \cdot 6^t + 0.5833 \cdot 3^t + 0.1667 \cdot 2^t + 0.0833 \cdot (-1)^t}{6^t} \right).$$

▲

Den beräkning vi gjorde i senaste exemplet gäller naturligtvis generellt. Vi får alltid en summa av potenser av egenvärdena, med koefficienter som ges av \mathbf{v}_n . Eftersom V_n är ortogonal vet vi dessutom att \mathbf{v}_n har längd ett, vilket ger att

$$\sum_{k=1}^{2n-2} v_k^2 = \|\mathbf{v}_n\|^2 = 1.$$

Därmed har vi visat följande sats.

Sats 8.10. Låt $\mathbf{v}_n = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n-2})^T = V_n \mathbf{e}_1$ och låt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2n-2}$ vara egenvärdena till K_n . Då ges det förväntade antalet brytpunkter efter t vändningar av

$$\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t) = n \left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{2n-2} v_k^2 \lambda_k^t}{\binom{n}{2}^t} \right),$$

där $\sum_{k=1}^{2n-2} v_k^2 = 1$.

Den viktigaste informationen om $\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t)$ får vi om vi beräknar de största egenvärdena till K_n . Anledningen är att dessa kommer att ge de dominerande termerna i summan då t växer.

8.3 Övningar

Övning 8.1. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådan att $A = PDP^T$ om

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Övning 8.2. Beräkna A^m för alla heltal m om

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Övning 8.3. I kapitel 5 såg vi för $n = 2$ att antalet brytpunkter är 2 efter udda antal vändningar och 0 efter jämnt antal vändningar. De förväntade antalet brytpunkter blir då två efter udda antal vändningar och noll efter jämnt antal vändningar. Verifiera detta genom att beräkna $\mathbb{E}_{\text{brp}}(2, t)$ enligt formeln given i detta kapitel.

Övning 8.4. Beräkna $\mathbb{E}_{\text{brp}}(3, t)$.

9 Förväntat avstånd mellan genom

Vi kan nu beräkna en bra approximativ formel för $\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t)$. Denna formel går dessutom att invertera, vilket ger en god uppskattning av det evolutionära avståndet mellan två genom. Vi avslutar med att se hur väl det fungerar i praktiken.

9.1 De största egenvärdena och deras egenvektorer

I föregående kapitel såg vi att beteendet hos $\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t)$ i huvudsak styrdes av de till beloppet största egenvärdena till K_n . Det största har vi beräknat till $\binom{n}{2}$, och vi har förmodat $\binom{n-1}{2}$ för det näst största. Vi ska nu visa att detta är korrekt och dessutom bestämma koefficienterna v_k^2 till dessa.

Följsats 9.1. *Koefficienten till det största egenvärdet $\lambda_1 = \binom{n}{2}$ är*

$$v_1^2 = \frac{1}{2n-2}.$$

BEVIS: Sats 7.3 gav att största egenvärdet till K_n bara har en egenvektor, nämligen $(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$. Normerar vi får vi $\frac{1}{\sqrt{2n-2}}$ på varje position, så $v_1^2 = \frac{1}{2n-2}$. ■

För att kunna gå vidare till nästa egenvärde behöver vi samla mer information. Vi börjar med en hjälpsats som vi behöver, och presenterar därefter ett exempel på hur vi kan använda detta lemma för att visa satsen. Lemmat presenteras utan bevis. För att göra framställningen tydligare kommer vi säga att de element m_{ij} i en matris som har $i+j$ udda står på **udda plats**, och de övriga står på **jämn plats**.

Lemma 9.2. *Låt $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ vara egenvärdena till matrisen A . Då gäller att*

$$\lambda_{1+i+j}(A+B) \leq \lambda_{1+i}(A) + \lambda_{1+j}(B).$$

Exempel 9.3. Betrakta matriserna K_4 och K_6 i exemplet i kapitel 7. Dra bort 1 från varje element på udda plats i K_6 och dessutom 4 från elementen på diagonalen. Då får vi matrisen

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Jämför vi denna med K_4 ser vi att mittenområdet är precis samma som K_4 och utanför har vi bara element på diagonalen. Det är denna relation som gör att vi kan säga något om egenvärdena till K_6 med hjälp av egenvärdena till K_4 .

Kalla matrisen av denna storlek med ettor på udda plats och nollor på jämn plats för A_6 , och kalla matrisen vi fick i beräkningen ovan för B_6 . Vi har då relationen $K_6 = A_6 + B_6 + 4I$, där I är identitetsmatrisen. Egenvärdena till $4I$ är alla 4, egenvärdena till A_6 är $\{5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5\}$ och egenvärdena till B_6 är samma som till K_4 , samt fyra sexor, vilket ger $\{6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 2, -1\}$. Därför får vi

$$\begin{aligned}\lambda_2(K_6) &= \lambda_2(A_6 + B_6 + 4I) \leq \lambda_2(A_6) + \lambda_1(B_6 + 4I) \\ &\leq \lambda_2(A_6) + \lambda_1(B_6) + \lambda_1(4I) = 0 + 6 + 4 = 10.\end{aligned}$$

Det räcker nu att visa att 10 är ett egenvärde till K_6 för att visa att det också måste vara det näst största egenvärdet till K_6 . \blacktriangle

Följande sats beskriver det näst största egenvärdet och dess egenvektorer. Beviset är långt och rätt svårt, så för att underlätta läsandet bör man välja ett värde på n , till exempel $n = 6$, och utföra alla beräkningar i detta specialfall. Då blir det lättare att förstå det allmänna resonemanget i beviset.

Sats 9.4. *Näst största egenvärdet till K_n är $\binom{n-1}{2}$ för $n \geq 4$. Dess multiplicitet är minst tre och koefficienten ges av $v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n-2}$.*

BEVIS: Vi visar först att K_n verkligen har egenvärdet $\binom{n}{2}$ med multiplicitet minst tre. Det gör vi genom att presentera tre ortogonala egenvektorer till detta egenvärde.

Tre ortogonala egenvektorer med detta egenvärde är

$$\mathbf{w}_1 = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1 \ 0)^T,$$

$$\mathbf{w}_2 = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1)^T$$

och

$$\mathbf{w}_3 = \left(\frac{n-3}{2} \ \frac{n-3}{2} \ -1 \ -1 \ \dots \ -1 \ \frac{n-3}{2} \ \frac{n-3}{2}\right)^T.$$

Det är enkelt att se att de två första har egenvärdet $\binom{n-1}{2}$, och för den tredje får vi i vektorn $K_n \mathbf{w}_3$ elementen

$$\frac{n-3}{2} \binom{n-1}{2} + 2 \frac{n-3}{2} - \frac{2n-2-4}{2} = \frac{n-3}{2} \binom{n-1}{2}$$

på de två första och sista positionerna och

$$2 \frac{n-3}{2} - \left(\binom{n}{2} - 2\right) = n-1 - \binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} - \binom{n}{2} = -\binom{n-1}{2}$$

på de andra positionerna. Detta visar att även w_3 är en egenvektor med detta egenvärde. Man ser enkelt att dessa tre vektorer är ortogonala.

Vi ska nu visa att om man tar bort A_n och $(n-2)I$ från K_n , så får man en matris som innehåller K_{n-2} på samma sätt som B_6 innehåller K_4 i exemplet. Vi definierar $B_n = K_n - A_n - (n-2)I$ och låter C_n vara den matris vi får om vi tar bort de första och sista två raderna och kolonnerna från B_n . Den ska jämföras med K_{n-2} . Platserna i matriserna svarar mot olika tillstånd i markovkedjorna, vilket innebär olika positioner för genen g_1 . I C_n svarar det mot positionerna 2 till $n-2$, riktade såväl framåt som bakåt, eftersom vi tagit bort positionerna 1 och $n-1$, och i K_{n-2} svarar det mot positionerna 1 till $n-3$.

Låt i och j vara de aktuella positionerna i C_n och antag att de tillstånd vi jämför har olika tecken. Då får vi

$$\min\{i, j, n-i, n-j\} - 1 = \min\{i-1, j-1, n-1-i, n-1-j\}.$$

I K_{n-2} är positionerna ett steg lägre, så för att kunna jämföra ersätter vi därför i med $i+1$ och j med $j+1$. Detta ger

$$\begin{aligned} \min\{(i+1)-1, (j+1)-1, n-1-(i+1), n-1-(j+1)\} \\ = \min\{i, j, (n-2)-i, (n-2)-j\}, \end{aligned}$$

vilket är precis vad vi har i $M - n - 2$. För övriga element utanför diagonalen är elementen noll i bägge fall.

Vi betraktar nu diagonalen. Låt i vara positionen i C_n . Vi får, med hjälp av rekursionsformeln för binomialkoefficienter,

$$\begin{aligned} \binom{i}{2} + \binom{n-i}{2} - (n-2) &= \binom{i}{2} + \binom{n-i}{2} - (i-1) - (n-i-1) \\ &= \binom{i}{2} - \binom{i-1}{1} + \binom{n-i}{2} - \binom{n-i-1}{2} \\ &= \binom{i-1}{2} + \binom{n-i-1}{2}. \end{aligned}$$

Ersätter vi igen i med $i+1$ får vi

$$\binom{(i+1)-1}{2} + \binom{n-(i+1)-1}{2} = \binom{i}{2} + \binom{(n-2)-i}{2},$$

vilket är precis vad vi ska ha för K_{n-2} .

Därmed har vi visat att B_n innehåller K_{n-2} . Utanför C_n innehåller B_n elementen $\binom{n-1}{2} - (n-2) = \binom{n-2}{2}$ på diagonalen och nollor i övrigt. Egenvärdena blir därför fyra kopior av diagonalelementen $\binom{n-2}{2}$ samt egenvärdena till K_{n-2} .

Använder vi nu lemma 9.2 får vi att

$$\begin{aligned} \lambda_2(K_n) &= \lambda_2(A_n + B_n + (n-2)I) \leq \lambda_2(A_n) + \lambda_1(B_n + (n-2)I) \\ &\leq \lambda_2(A_n) + \lambda_1(B_n) + \lambda_1((n-2)I) \\ &= 0 + \binom{n-2}{2} + (n-2) = \binom{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Eftersom vi vet att detta egenvärden existerar måste de också vara de näst största, eftersom det bara finns ett större, och det är $\binom{n}{2}$.

Vi har visat att om $\binom{n-3}{2}$ är näst största egenvärdet till K_{n-2} så är $\binom{n-1}{2}$ det näst största egenvärdet till K_n . Eftersom det dessutom är sant för K_4 är det enligt induktionsprincipen sant för all jämna $n \geq 4$ och eftersom det är sant för $n = 5$ är det sant för alla udda $n \geq 5$. Därmed är det sant för alla $n \geq 4$.

Koefficienten $v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$ ges av egenvektorerna. Deras längder är $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{2}$ och

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_3\| &= \sqrt{4 \left(\frac{n-3}{2} \right)^2 + (2n-2-4) \cdot 1^2} \\ &= \sqrt{(n^2 - 6n + 9) + (2n - 6)} \\ &= \sqrt{n^2 - 4n + 3} = \sqrt{(n-1)(n-3)}, \end{aligned}$$

så om vi normerar får vi

$$v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 + \left(\frac{n-3}{2\sqrt{(n-3)(n-1)}} \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{n-3}{4(n-1)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n-2}.$$

■

9.2 Beräkning av formel och dess invers

Vi har nu beräknat de största egenvärdena och deras koefficienter. En empirisk undersökning indikerar dessutom att den tredje största egenvärdet ligger nära det näst största egenvärdet, och att dess koefficient är nästan $1/4$. Vi får därmed en god approximation om vi låtsas att det tredje största egenvärdet är $\binom{n-1}{2}$ och att koefficienten är $1/4$. Totala koefficienten till $\binom{n-1}{2}$ blir då

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2n-2}.$$

Sätter vi in detta i formeln

$$\mathbb{E}_{\text{brp}}(\mathbf{n}, t) = n \left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{2n-2} v_k^2 \lambda_k^t}{\binom{n}{2}^t} \right),$$

så får vi den approximativa formeln

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\text{appr}}(n, t) &= n \left(1 - \frac{1}{2n-2} \binom{n}{2}^t + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right) \binom{n-1}{2}^t \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{2n-2} - \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right) \left(\frac{n-2}{n}\right)^t \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{2n-2} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^t \right).\end{aligned}$$

Denna formel kan inverteras. Gör vi det får vi en approximation av det förväntade antalet vändningar som lett till ett genom med b brytpunkter. Formeln

$$b = n \left(1 - \frac{1}{2n-2} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^t \right)$$

leder till

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^t = 1 - \frac{b}{n \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)},$$

vilket i sin tur leder till

$$\mathbb{E}_{\text{vänd}}(n, b) = t = \frac{\log \left(1 - \frac{b}{n \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)} \right)}{\log \left(1 - \frac{2}{n} \right)}.$$

Eftersom vi inte räknat helt exakt är detta bara en approximation. Det kan därför vara lämpligt att ta reda på hur väl den beter sig. I figur 8 ser vi resultatet av ett antal simuleringar. Vi ser att det förväntade avståndet följer linjen mycket bättre än det kortaste avståndet. De stora felen längst till höger beror på att slumpen får en allt större betydelse ju fler vändningar som utförts.

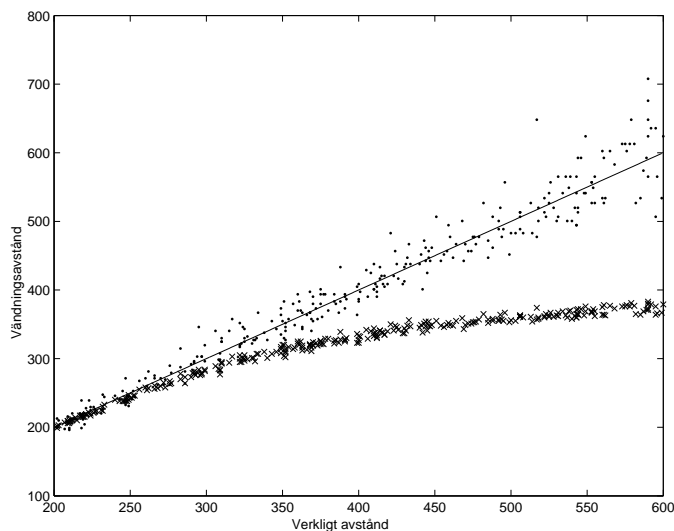
9.3 Övningar

Övning 9.1. Ett genom av längd 400 uppvisar 273 brytpunkter. Vilket är det förväntade evolutionära vändningsavståndet till identitetsgenomet?

Övning 9.2. Vilket är det förväntade antalet brytpunkter efter väldigt många förflyttningar?

Övning 9.3. En bättre approximation av $\mathbb{E}_{\text{brp}}(n, t)$ får vi om vi approximerar det tredje största egenvärdet med $\binom{n-1}{2} - 2$ och koefficient $1/4$. Vilken formel får vi då? Går den att invertera?

Övning 9.4. Egenvärdet $\binom{n-2}{2} + 1$ har tre egenvektorer. Två av dem är $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ -1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ och $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)^T$.



Figur 8: Vi har beräknat det kortaste avståndet och det förväntade avståndet för ett antal simulerade genom. Vi ser att det förväntade avståndet är mycket bättre än det kortaste för att uppskatta det verkliga avståndet.

Finn den tredje, genom att gissa och verifiera (glöm inte att den måste vara ortogonal mot de två första), och visa sedan att koefficienten till detta egenvärde är noll. Egenvärdet påverkar alltså inte resultatet av beräkningen av $\mathbb{E}_{\text{brp}}(\mathbf{n}, \mathbf{t})$.

Övning 9.5. Om matriserna A och B är av storlek $m \times m$ gäller formeln

$$\lambda_{m-i-j}(A + B) \geq \lambda_{m-i}(A) + \lambda_{m-j}(B).$$

Använd denna för att visa att minsta egenvärdet till K_n är större än eller lika med $-n/2$.

Övning 9.6. Låt $n = 4$ och jämför det approximativa förväntade antalet brytpunkter, $\mathbb{E}_{\text{appr}}(4, \mathbf{t})$, med det riktiga antalet, $\mathbb{E}_{\text{brp}}(4, \mathbf{t})$, för några värden på \mathbf{t} (den senare formeln finns i kapitel 8). Hur stort blir felet som störst? Vad händer när \mathbf{t} blir stort?

10 Appendix: Algebrans Fundamentalsats

Lemma 10.1. *Varje reellt polynom av udda grad har åtminstone ett nollställe.*

BEVIS: Vi kan anta att polynomet är på formen $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$. Låt $c = |a_1| + \dots + |a_n| + 1$. Då $c \geq 1$ har vi att $-|a_i|c^{n-i} \geq -|a_i|c^n$ för alla $i = 1, \dots, n$. Detta ger följande estimeringar

$$\begin{aligned} p(c) &\geq c^n - |a_1|c^{n-1} - \dots - |a_n| \\ &\geq c^n - c^{n-1}(|a_1| + \dots + |a_n|) = c^{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Om vi använder att n är udda visar man, analogt med argumentet ovan, att $p(-c) \leq -c^{n-1} < 0$. Vi har då att funktionen $p(t)$ antar båda negativa och positiva värden, och rimligtvis då även värdet noll. Mera precist kan vi använda Medelvärdesatsen som säger att en kontinuerlig funktion f definierad på ett intervall $[a, b]$ antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$. ■

Hjälpssats 10.2. *Låt d vara ett fixerat heltal, och låt \mathbb{F} antingen vara de reella talen \mathbb{R} eller de komplexa talen \mathbb{C} . Antag att för varje heltal n som ej delas av d , har varje linjär avbildning $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ åtminstone en egenvektor. Då vill varje mängd av kommuterande avbildningar A_1, \dots, A_r på \mathbb{F}^n ha en gemensam egenvektor.*

BEVIS: Vi visar satsen med hjälp av induktion på antalet avbildningar r . Fallet $r = 1$ är klart, och vi antar därför att satsen gäller för kommuterande avbildningar som är $r - 1$ i antalet.

Vi skall nu visa att avbildningarna A_1, \dots, A_r har en gemensam egenvektor, och detta skall vi göra med induktion på dimensionen n . Startvärdet för denna induktion, $n = 1$, är klart. Antaga därmed att A_1, \dots, A_r har en gemensam egenvektor i dimensionen m , där $m < n$, som ej delas av d .

Låt K vara nollrummet till avbildningen $A_1 - \lambda I_n : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$, där I_n är identitetsavbildningen och λ ett fixerat egenvärde till A_1 . Vi har antagit att A_1 har en egenvektor, och följaktligen har vi att $\dim(K) > 0$. Låt I vara bilden till avbildningen $A_1 - \lambda I_n$. Då vi har att avbildningarna A_1, \dots, A_r kommuterar följer det att vi får inducerade avbildningar $A_i : K \rightarrow K$ och $A_i : I \rightarrow I$, för varje $i = 1, \dots, r$.

Om $\dim(K) = n$, dvs. egenrummet till A_1 är hela \mathbb{F}^n är vi klara, ty de $(r - 1)$ avbildningarna A_2, \dots, A_r har en gemensam egenvektor v vid induktionsantagande. Men denna vektor v är också en egenvektor till A_1 då $K = \mathbb{F}^n$.

Om $m = \dim(K) < n$ där talet d ej delar m , är vi också klara. Vi har då av induktionsantagandet att de inducerade avbildningarna A_1, \dots, A_r på K har en gemensam egenvektor v , och denna vektor betraktad som ett element i \mathbb{F}^n blir då en gemensam egenvektor.

Vi har då kvar tillfället $m = \dim(K) < n$ och d delar m . Vi har då också att $0 < \dim(I) < n$. Av Dimensionssatsen har vi att $\dim(K) + \dim(I) = n$, och

följaktligen kan inte talet d dela $\dim(I)$. Av induktionsantagandet har vi att de inducerade avbildningarna A_1, \dots, A_r på I har en gemensam egenvektor, och denna vektor betraktad som ett element i \mathbb{F}^n blir då en gemensam egenvektor. Vi har nu visat satsen. ■

Följdsats 10.3. *Kommuterande avbildningar på \mathbb{R}^{2m+1} har en gemensam egenvektor.*

BEVIS: Vi har att $d = 2$ inte delar $n = 2m + 1$, och påståendet i satsen följer då om vi kan visa att varje avbildning $A : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ har en egenvektor. Det karakteristiska polynomet $p(t) = \det(A - tI_n)$ är ett polynom av udda grad $2m + 1$. Av lemma 10.1 har polynomet $p(t)$ ett nollställe, och därmed har T ett egenvärde och en egenvektor. ■

10.1 Komplexa och reella vektorrum

Varje komplext vektorrum kan ses som ett reellt vektorrum. Märk att dimensionen till ett komplext vektorrum W dubblas när W betraktas som ett reellt vektorrum. Låt W_n vara det reella vektorrummet av komplexa $(n \times n)$ -matriser. En matris $B \in W$ är Hermitisk om $B = \overline{B}^T$. Mängden av Hermitiska matriser H_n är sluten under multiplikation med reella tal, och under addition. Med andra ord har vi att mängden H_n är ett delrum av W_n . Vidare har vi att diagonalelementen till en Hermitisk matris B är reella och att element nedanför diagonalen bestäms av elementen ovanför diagonalen. Av detta resonemang följer att $\dim H_n = n + n(n-1) = n^2$. Speciellt har vi att dimensionen till H_n är udda om n är udda.

Hjälpsats 10.4. *Varje avbildning på \mathbb{C}^{2m+1} har åtminstone ett egenvärde.*

BEVIS: Vi låter $A : \mathbb{C}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2m+1}$ vara en given avbildning. Definiera nu två avbildningar T_1 och T_2 på det reella vektorrummet $H_n = H_{2m+1}$ av Hermitiska matriser med

$$T_1(B) = \frac{AB + B\overline{A}^T}{2} \quad \text{och} \quad T_2(B) = \frac{AB - B\overline{A}^T}{2i}.$$

Man kollar att avbildningarna T_1 och T_2 kommuterar varpå det följer av följsats 10.3 att T_1 och T_2 har en gemensam egenvektor $E \in H_n$. Med andra ord har vi att $T_1(E) = \lambda E$ och att $T_2(E) = \nu E$ för några reella tal λ och ν . Slutligen ser vi att

$$A \cdot E = (T_1 + iT_2)E = (\lambda - i\nu)E.$$

Vi har då för varje kolonn v i E att $Av = (\lambda - i\nu)v$. Matrisen E är ej noll-matrisen per definition av egenvektor, och följsatsen måste åtminstone en

kolonn v i E vara noll-skild. Denna kolonn kan vi betrakta som en vektor i \mathbb{C}^{2n+1} , och vi har att $T(v) = (\lambda - iv)v$; en egenvektor för T . ■

Lemma 10.5. *Varje komplext polynom $p(t) = t^2 - \lambda t + \nu$ kan skrivas som en produkt $p(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$.*

BEVIS: Detta påstående visas på samma sätt som man visar att ett reellt andragsgradspolynom kan skrivas som en produkt av linjära faktorer $(t - \alpha)(t - \beta)$. ■

10.2 Skevsymmetriska matriser

Låt S_n vara det komplexa delrummet av skevsymmetriska $(n \times n)$ -matriser. En matris B är skevsymmetrisk om $B = -B^T$. Det komplexa vektorrummet S_n har dimension $n(n-1)/2$ då elementen på nedre diagonal bestäms av den övre diagonalen och diagonal elementen är alla noll.

Hjälpssats 10.6. *Låt $k > 0$ vara ett fixerad heltal, och låt n vara ett tal som ej delas av 2^k . Då har vi att varje mängd av kommuterande avbildningar A_1, \dots, A_r på \mathbb{C}^n har en gemensam egenvektor.*

BEVIS: Vi visar satsen med induktion över k . För $k = 1$ har vi att n nödvändigtvis är udda $n = 2m + 1$. Av hjälpssats 10.4 har vi att varje avbildning $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ har en egenvektor, och av hjälpssats 10.2 har vi då, med $d = 2$, att varje mängd av kommuterande avbildningar på \mathbb{C}^n har en gemensam egenvektor.

Antaga nu att påståendet gäller för $k = l - 1$, d.v.s. alla kommuterande avbildningar på \mathbb{C}^n har en gemensam egenvektor, där 2^{l-1} ej delar n . Vi skall nu visa att påstående också är sant för $k = l$.

Låt $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ vara en godtycklig linjär avbildning där 2^l ej delar n . Av hjälpssats 10.2 behöver vi bara visa att A har en egenvektor, och kombinerad med induktionsantagandet kan vi låta l vara sådant att 2^{l-1} delar n .

Vid att använda att 2^l delar n , men att 2^{l-1} ej delar n får vi att 2^{l-1} ej delar till dimensionen $n(n-1)/2$ till vektorrummet av skevsymmetriska matriser S_n . Vi skall använda induktionsantagandet på vektorrummet S_n .

Definiera följande två avbildningar T_1 och T_2 på S_n vid

$$T_1(B) = AB - BA^T \quad \text{och} \quad T_2(B) = ABA^T,$$

för alla skevsymmetriska matriser B . Läsaren kollar själv att $T_1(B)$ och $T_2(B)$ också är skevsymmetriska, och att avbildningarna kommuterar. Följaktligen har vi av induktionsantagandet att T_1 och T_2 har en gemensam egenvektor E .

Med andra ord har vi att $T_1(E) = \lambda E$ och att $T_2(E) = \nu E$ för några komplexa tal λ och ν . Detta ger ekvationen

$$\nu E = T_2(E) = AEA^T = A(AE - T_1(E)) = A(AE - \lambda E),$$

vilket vi kan skriva om som $(A^2 - \lambda A - \nu)E = 0$. För varje kolonn v i E har vi då ekvationen

$$(A^2 - \lambda A - \nu)v = 0.$$

Det komplexa polynomet $p(t) = t^2 - \lambda t - \nu$ kan vi skriva som $p(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$. Vi låter v vara en icke-noll kolonn i E och sätter $w = (A - \beta I_n)v$. Om $w = 0$ är v en egenvektor för A , och $w \neq 0$ har vi att w är en egenvektor för A då vi av ekvationen över har att

$$(A - \alpha I_n)w = (A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)v = 0.$$

Vi har då visat att vår godtyckliga avbildning $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ har en egenvektor och av hjälpsats 10.2 har vi, med $d = 2^1$, att varje mängd av kommuterande avbildningar har en gemensam egenvektor. Vilket vi skulle visa. ■

Följdsats 10.7. *Varje mängd av kommuterande avbildningar på \mathbb{C}^n har en gemensam egenvektor.*

BEVIS: Till ett givet heltal n kan vi alltid hitta något k sådan att 2^k ej delar n , och påståendet följer då av hjälpsatsen. ■

Sats 10.8 (Algebrans Fundamentalsats). *Varje polynom $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av linjära faktorer, d.v.s.*

$$p(t) = \prod_{i=1}^n (t - \alpha_i).$$

BEVIS: Det är tillräckligt att visa att ett godtycklig polynom $p(t)$ har ett nollställe α , ty detta ger att $p(t) = q(t)(t - \alpha)$ var graden till $q(t)$ är 1 mindre än graden till $p(t)$. Vi kan därför använda induktion på graden och varav resultatet följer.

Vi skall därför visa att $p(t)$ har ett nollställe. Läsaren kan lätt verifiera att $p(t) = \det(tI_n - A)$, där matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är $p(t)$ det karakteristiska polynomet till någon linjär avbildning $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Av följsats 10.7 har denna linjära avbildning en egenvektor, och då också ett egenvärde α . Egenvärdet α är ett nollställe till det karakteristiska polynomet $p(t)$. ■