KTH Matematik

KTHs Matematiska Cirkel

Integraler

Joakim Arnlind

Tomas Ekholm

Institutionen för matematik, 2004

Finansierat av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse

Innehåll

Några ord på vägen

Detta kompendium är skapat för att användas som litteratur till KTHs Matematiska Cirkel under läsåret 2004–2005. Kompendiet består av åtta avsnitt, samt ett inledande avsnitt. Kompendiet är inte tänkt att läsas på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju träffarna.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Övningsuppgifterna är fördelade i två kategorier. De med udda nummer har facit, och syftet med dessa är att eleverna ska kunna räkna dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. De med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa även dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av oss.

Vi bör också nämna att få av uppgifterna är helt enkla. Kika därför inte i facit efter några få minuter (om du inte löst uppgiften), utan prata först med kompisar eller försök litet till. Alla uppgifter ska gå att lösa med hjälp av informationen i detta kompendium.

KTHs Matematiska Cirkel finasieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Vi tackar Dan Laksov och Roy Skjelnes, båda från Institutionen för Matematik vid KTH, för deras givande kommentarer om denna skrift.

Några ord om Cirkeln

KTHs Matematiska Cirkel, i dagligt tal benämnd Cirkeln, startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga studier. Lärarna på cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet.

Till varje kurs skrivs ett kompendium, varav detta är ett exempel, som distribueras gratis till eleverna. Detta material, liksom övriga uppgifter om KTHs Matematiska Cirkel, finns tillgängligt på

`http://www.math.kth.se/cirkel`

Sedan 2001 godkänns Cirkeln av Stockholms Stad som en 50-poängskurs eller som matematisk breddning. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning. Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om KTHs Matematiska Cirkel och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygsättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

Godkänd: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Väl godkänd: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Mycket väl godkänd: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Det är också möjligt att skolorna samarbetar, så elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, augusti 2004

1 Introduktion

För att på ett enkelt och kortfattat sätt kunna beskriva det vi önskar i följande kapitel krävs att vi behärskar lite elementär mängdlära. Vi ska därför gå igenom grunderna här.

En *mängd* innehåller *objekt*, utan repetition. Objekten kallar vi för *element*. Den *tomma mängden* innehåller ingenting. Ibland kan en mängd presenteras genom att elementen skrivs i godtycklig ordning mellan ett par krullparenteser ($\{\}$).

Exempel 1.1. Mängden som innehåller elementen 1, 3 och a kan exempelvis skrivas $\{1, 3, a\}$ eller $\{1, a, 3\}$. ▲

Att ett element x ligger i mängden A betecknas $x \in A$. Att mängden B är en *delmängd* till mängden A, d.v.s. att alla element i B också är element i A, betecknas $B \subseteq A$.

Exempel 1.2. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. ▲

Man är ofta intresserad av de element som är element i någon av två mängder, eller i båda mängderna.

Definition 1.3. *Unionen* av två mängder A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. *Snittet* av två mängder består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.4. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $\{5, 8, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6,\ 8, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$. ▲

Vi ska nu titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de naturliga talen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Denna mängd betecknas $\mathbb{N}$ och beteckningen kommer från **N**aturliga tal. Tar vi med negativa tal får vi heltalen $\{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$ (**Z**ahl (tal på tyska)). Tar vi kvoter av heltal (med nämnare skild från 0) får vi de rationella talen $\mathbb{Q}$ (från engelskans **Q**uotient (kvot)). Den viktigaste talmängden inom analysen är de reella talen. Det är alla tal som kan skrivas som en (ändlig eller oändlig) decimalutveckling. Mängden av dessa betecknas $\mathbb{R}$.

Mängder betecknas ofta mer indirekt, med hjälp av en beskrivning. Innanför krullparenteser skriver man då ett uttryck, sedan ett kolon och därefter restriktioner för uttrycket.

Exempel 1.5. Mängden av alla reella tal större än 3 kan skrivas $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Då gäller följande likheter: $\{x^2 : x \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ och $\{2^x : x \in A\} = \{2, 4, 8, 16, 32\}$. ▲

Vill man beteckna ett intervall av de reella talen använder man paranteser och hakparanteser. Exempelvis betecknar $[a, b]$ mängden av alla reella tal mellan a och b, inklusive dessa (d.v.s. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$) och (a, b) är samma intervall, men utan a och b ($(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$). Dessa intervall kallas *slutna* respektive *öppna*. Det finns även *halvöppna* intervall, t.ex. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$.

Det vi kommer att förutsätta i hela kompendiet är att läsaren känner till derivatan av de elementära funktionerna, såsom derivatan av $x^n, \sin(x), e^x, \ldots$, samt produktregeln och kedjeregeln för derivering.

2 Gränsvärden

Vilket tal i mängden $[0,1]$ är störst? Talet 1 verkar ju vara en given vinnare, vilket också stämmer. Vi skriver

$$\max[0,1] = 1$$
$$\min[0,1] = 0$$

Om jag nu frågar efter det största talet i mängden $[0,1)$ blir det betydligt svårare. Svaret är att inget tal är störst. (Varför? Om något tal är störst borde vi kunna ange det, eller hur?) Låt oss precisera vår intuitiva uppfattning av största elementet i en mängd.

Definition 2.1. M är en *övre begränsning* till en mängd G om $x \leqslant M$ för alla $x \in G$.

Axiom 2.2. Varje uppåt begränsad delmängd av de reella talen har en minsta övre begränsning.

Axiom 2.2 är inte sant om vi endast studerar de rationella talen då t.ex. $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ saknar minsta övre begränsning ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Definition 2.3. Den *minsta* övre begränsningen av en mängd A kallas för *supremum* av A och skrivs $\sup A$.

Exempel 2.4. $\sup[0,1] = \max[0,1] = 1$. ▲

Exempel 2.5. $\sup[0,1) = 1$ medan $\max[0,1)$ saknas. ▲

På ett analogt vis kan vi definiera *infimum* av en mängd A eller $\inf A$ som den *största* undre begränsningen av A.

I resten av detta kompendium kommer vi att använda oss mycket av *absolutbelopp*. Låt påminna oss om vad vi menar med *beloppet av x*.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, då } x \geqslant 0 \\ -x & \text{, då } x < 0 \end{cases}$$

Beloppet av x anger avståndet från x till talet 0. Lite mer allmänt kan vi skriva $|x-a| = b$ som betyder att avståndet från x till a är b.

Exempel 2.6. $|3-4| = |-1| = 1$. $|4-3| = |1| = 1$. Alltså, avståndet mellan 4 och 3 är 1. ▲

Betrakta följande följd av bråk

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Intuitivt vet vi att när n blir större och större så blir $1/n$ mindre och mindre, och vi kan komma hur nära 0 som helst bara vi väljer ett tillräckligt stort n. Det är denna intuitiva uppfattning om *gränsvärden* som vi vill göra matematik av.

Låt oss betrakta en godtycklig talföljd av reella tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eller lite förenklat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vi frågar oss om talföljden stabiliserar sig vid något värde för stora värden på n. I exemplet med $1/n$ tycks talföljden närma sig 0. Vi inför följande definition

Definition 2.7. En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sägs *konvergera mot gränsvärdet* A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ då $n \geqslant N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas *konvergent*, annars *divergent*.

Exempel 2.8. Låt oss visa att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tag ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Om vi väljer $n > 1/\varepsilon$ så får vi att

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

▲

Exempel 2.9. Låt oss visa att $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill nu finna ett N sådant att $e^{-n} < \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$. Det gäller att $|e^{-n} - 0| < \varepsilon$ om $-n < \ln\varepsilon$ eller om $n > -\ln\varepsilon$. ▲

Exempel 2.10. Är $\lim_{n\to\infty} n^2$ konvergent? Intuitionen säger oss att det inte är så. När n växer så växer n^2 ännu fortare. Låt oss anta att det skulle konvergera mot talet C. Tag som exempel att $\varepsilon = 1$. Om uttrycket är konvergent skall vi kunna hitta ett N, så att

$$\left|n^2 - C\right| < 1$$

för alla n större än N. Men här ser vi direkt att om vi väljer ett n mycket större än C, så kommer inte olikheten att gälla. Alltså är inte $\lim_{n\to\infty} n^2$ konvergent. ▲

En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kallas *växande* om $a_{n+1} \geqslant a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$, och *uppåt begränsad* om det finns en övre begränsning till $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, d.v.s. ett tal M sådant att $a_n \leqslant M$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Sats 2.11. *En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som är växande och uppåt begränsad är konvergent och*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

Bevis: Antag att talföljden är uppåt begränsad av talet M, d.v.s. M är en övre begränsning till talföljden. Enligt Axiom 2.2 finns det en minsta övre begränsning till $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, låt oss kalla denna minsta övrebegränsning för K. Vi har att

$$\sup\{a_n : n \geqslant 1\} = K.$$

Då K är den minsta övre begränsningen till talföljden så finns det tal i talföljden oändligt nära K (i vissa fall även lika stora som K). D.v.s. för varje givet $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $K - a_N < \varepsilon$. Men då talföljden är växande kommer $K - a_n < \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$. Vi har visat att gränsvärdet av talföljden är K, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K.$$

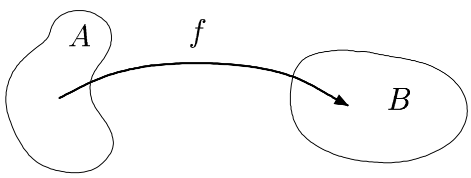
■

Sats 2.12. *Låt $I_k = [a_k, b_k]$ vara slutna intervall sådana att $I_{k+1} \subset I_k$ för alla $k \geqslant 1$. Då finns det åtminstone en punkt x sådan att $x \in I_k$ för alla k.*

Bevis: Vi observerar att $a_n \leqslant b_m$ för alla m och n, ty om $n \geqslant m$ har vi $a_n \leqslant b_n \leqslant b_m$ annars om $m \geqslant n$ har vi $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m$. Talföljden $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad av varje b_1. Enligt sats 2.11 är talföljden konvergent med gränsvärdet $x = \sup a_k$. Vi har att $a_m \leqslant x$ för varje m och att $x \leqslant b_m$ för varje m eftersom alla b_m är övre begränsningar till $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ varav x är den minsta. Alltså har vi visat att $x \in I_k$ för alla k. ■

Vi har definierat vad vi menar med att en talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett gränsvärde. Denna definition är enkel att generalisera till funktioner. Vi börjar med att förklara vad som menas med en funktion.

Definition 2.13 (Funktion). En funktion $f : A \to B$ tilldelar till varje element i mängden A ett *unikt* element i mändgen B. Mängden A, som ofta betecknas D_f, kallas *definitionsmängd* och mängden B kallas *målmängd.*



En funktion kommer alltså i ett paket med sin definitionsmängd och sin målmängd. I många fall är det underförstått vilken definitions- och målmängd det handlar om, och vi utelämnar dem.

Exempel 2.14. När vi skriver funktionen $f(x) = 3x$, så menar vi samtidigt att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ▲

Om vi inte skriver ut målmängden i detta kompendium, så är det alltid $\mathbb{R}$ som gäller. Att det inte är lika viktigt att ange målmängden som definitionsmängden, ser vi i följande exempel.

Exempel 2.15. Låt $f(x) = x^2$, $D_f = [2, 5]$. Som målmängd kan vi ta $\mathbb{R}$ eller $[4, 25]$. ▲

Ett något mer abstrakt exempel kan se ut enligt följande.

Exempel 2.16. Låt $A = \{x, y, z\}$ och $B = \{a, b, c\}$. Låt oss definiera en funktion $f : A \to B$ genom att $f(x) = b$, $f(y) = a$ och $f(z) = b$. ▲

En viktigt begrepp förknippat med alla funktioner är funktionens *värdemängd* V_f. Det är den mängd vi får om vi stoppar in alla tal i definitionsmängden i funktionen

$$V_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$

Exempel 2.17. Tag $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $f(x) = x^2$. Vi inser att vi aldrig kommer att få ut ett negativt tal ur funktionen, när vi stoppar in ett reellt tal. Dock kommer vi att få ut alla reella *positiva* tal. Vi har värdemängden $V_f = [0, \infty)$. ▲

Låt oss nu utvidga vår definition av gränsvärde till funktioner.

Definition 2.18. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sägs ha *gränsvärdet A då $x \to \infty$* om det för alla $\varepsilon > 0$, finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ då $x \in D_f$ och $x \geqslant N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Exempel 2.19. Låt $f(x) = \frac{1}{x}$. Då x växer, avtar $\frac{1}{x}$ mot 0. Låt oss visa att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Tag ett $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att vi kan välja ett N (som beror på värdet av ε) sådant att

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

då $x \geqslant N$. Välj $N > \frac{1}{\varepsilon}$, då är $1/x < \epsilon$ för alla $x \geqslant N$. ▲

Med funktioner är man emellertid inte endast intresserad av gränsvärden då $x \to \infty$ utan även i en godtycklig punkt. Vi inför detta med en liknande definition.

Definition 2.20. En funktion f sägs ha *gränsvärdet A då $x \to a$* om det för alla $\varepsilon > 0$, finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ då $|x - a| < \delta$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Som ett exempel på ovanstående definition kan vi definiera derivatan.

Definition 2.21. Låt f vara en funktion definierad på intervallet (a, b) och låt $x \in (a, b)$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar, sägs f vara *deriverbar i punkten* x. Gränsvärdet betecknas med $f'(x)$ och kallas *derivatan av* f *i punkten* x.

Sats 2.22. *Antag att*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ och } \lim_{k \to \infty} x_k = a,$$

då följer att

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = A.$$

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett K sådant att

$$|f(x_k) - A| < \varepsilon \tag{2.1}$$

om $k \geqslant K$.

Förutsättningarna för satsen säger att det finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ om } |x - a| < \delta \tag{2.2}$$

och att det finns ett K sådant att $|x - a| < \delta$ om $k \geqslant K$. ■

Vi definierar nu vad vi menar när vi säger att en funktion är *begränsad.*

Definition 2.23. Funktionen f sägs vara *begränsad* om det finns ett tal M så att $f(x) \leqslant M$ för alla x i definitionsmängden.

Sats 2.24. *Låt* f *och* g *vara begränsade funktioner definierade på intervallet* (a, b) *och anta att*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

då följer att

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B,$

2. $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = AB.$

Bevis: Vi använder oss av definitionen.

1. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x) + g(x) - A - B| < \varepsilon$$

för alla $|x - x_0| < \delta$. Triangelolikheten ger oss

$$|f(x) + g(x) - A - B| \leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B|$$

Då $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ vet vi att det finns tal δ_1 och δ_2 sådana att

$$|f(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{då } |x - x_0| \leqslant \delta_1$$

och

$$|g(x) - B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{då } |x - x_0| \leqslant \delta_2.$$

Detta ger att

$$|f(x) + g(x) - A - B| \leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

då $|x - x_0| \leqslant \min(\delta_1, \delta_2)$.

2. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett δ sådant att $|f(x)g(x) - AB| < \varepsilon$ för alla $|x - x_0| \leqslant \delta$. Låt K vara större än $|B|$ och större än $\sup f$. Då $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ har vi att det finns tal δ_1 och δ_2 sådana att

$$|f(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}, \qquad \text{då } |x - x_0| \leqslant \delta_1,$$
$$|g(x) - B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}, \qquad \text{då } |x - x_0| \leqslant \delta_2.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leqslant |f(x)g(x) - f(x)B| + |f(x)B - AB| \\ &= |f(x)|\,|g(x) - B| + |B|\,|f(x) - A| \\ &\leqslant K\,|g(x) - B| + K\,|f(x) - A| \\ &\leqslant K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

då $|x - x_0| \leqslant \min(\delta_1, \delta_2)$.

■

Exempel 2.25. Vi visar att derivatan av en konstant är noll. För en konstant funktion f gäller att $f(x) = C$ för alla x. Därför får vi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

▲

Exempel 2.26. Ett annat välbekant exempel är

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\big(2x+h\big) = \lim_{h\to 0}(2x) + \lim_{h\to 0}(h) = 2x+0 = 2x\end{aligned}$$

d.v.s. att derivatan av x^2 är $2x$. På samma sätt kan vi visa att derivatan av x^n är nx^{n-1} ▲

Övning 2.1. Bestäm värdemängden till funktionen $f : [4, 9] \to \mathbb{R}$ där

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Övning 2.2. Låt oss betrakta funktionen $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 2\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Vad är $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Övning 2.3. Visa att

$$\sup\left\{\frac{3n+1}{n+2} \; : \; n = 0, 1, 2, 3, ...\right\} = 3.$$

Övning 2.4. Visa att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

är konvergent. Vad är gränsvärdet?

3 Kontinuitet

Definition 3.1. En funktion f sägs vara *kontinuerlig i punkten* $x = a$ om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Funktionen f sägs vara *kontinuerlig* om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd.

Lemma 3.2. *Låt f vara en kontinuerlig funktion och låt*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a, \tag{3.1}$$

då följer att

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

BEVIS: Eftersom f är kontinuerlig följer att

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{3.2}$$

Identiteterna (3.1) och (3.2) ger via Sats 2.22 att

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a),$$

vilket vi skulle visa. ■

Lemma 3.3. *Låt f vara kontinuerlig i punkten $x = a$ och $f(a) > c$. Då existerar ett öppet intervall $I = (a - \delta, a + \delta)$ kring $x = a$ sådant att $f(x) > c$ för alla $x \in I$.*

BEVIS: Tag $\varepsilon > 0$ sådant att $f(a) - c > \varepsilon$, vilket är ekvivalent med att $f(a) - \varepsilon > c$. Då f är kontinuerlig i $x = a$ gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

som i sin tur betyder att vi kan finna ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ då $|x - a| < \delta$. Att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ betyder att $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, vilket ger att $c < f(a) - \varepsilon < f(x)$ för alla $x \in I = \{x : |x - a| < \delta\}$. ■

Sats 3.4. *Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$, d.v.s. för varje c sådant att $f(a) < c < f(b)$ finns det ett x_0 sådant att $f(x_0) = c$.*

BEVIS: Om $f(a) = f(b)$ finns det inget att visa. Antag att $f(a) < f(b)$, det motsatta fallet $f(b) < f(a)$ kan behandlas analogt. Låt c vara ett godtyckligt tal sådant att $f(a) < c < f(b)$ Vi vill visa att det finns ett tal x_0 sådant att $f(x_0) = c$.

Låt oss bilda mängden $M = \{x \in [a,b] : f(x) < c\}$ som ej är tom eftersom $a \in M$ (eller hur?). Vi ska nu visa att $\lambda = \sup M$ uppfyller att $f(\lambda) = c$. Ett sätt att visa detta är att visa att vi inte har varken $f(\lambda) \leqslant c$ eller $f(\lambda) \geqslant c$.

Antag att $f(\lambda) < c$. Eftersom $f(\lambda) < c < f(b)$ kan vi inte ha $\lambda = b$ alltså måste $\lambda < b$. Enligt föregående lemma finns det nu ett öppet intervall I kring λ sådant att $f(x) < c$ för alla $x \in I$, d.v.s. det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(x) < c$ då $\lambda \leqslant x < \lambda + \delta$. Alla dessa x ligger alltså i M, men detta strider ju mot att $\lambda = \sup M$. Vi har fått en motsägelse till vårt antagande att $f(\lambda) < c$.

Antag nu att $f(\lambda) > c$. Eftersom $f(\lambda) > c > f(a)$ måste $\lambda > a$. Återigen får vi från föregående lemma att det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(x) > c$ då $\lambda - \delta < x \leqslant \lambda$. Detta betyder att det inte kan finnas något tal i M i intervallet $(\lambda - \delta, \lambda]$. Detta strider mot att $\lambda = \sup M$.

Vi har fått önskad likhet $f(\lambda) = c$. Då c var godtyckligt vald i $[a,b]$ gäller att f antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$. ■

Sats 3.5. *Låt f vara en kontinuerlig funktion på det slutna intervallet $I = [a,b]$, då gäller att $\max_{x\in I} f(x)$ och $\min_{x \in I} f(x)$ existerar.*

BEVIS: Låt oss visa att $\max_{x\in I} f(x)$ existerar, d.v.s. att det finns en punkt $p \in I$ sådan att $\sup_{x\in I} f(x) = f(p)$. Att $\min_{x\in I} f(x)$ existerar följer på ett analogt vis.

Låt $A = \sup_{x\in I} f(x)$, då följer att för varje positivt heltal k existerar det ett tal x_k sådant att
$$|A - f(x_k)| < \frac{1}{k}. \tag{3.3}$$
Dela intervallet I mitt itu och låt I_1 beteckna en av delarna som innehåller oändligt många tal ur talföljden $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dela nu intervallet I_1 mitt itu och låt I_2 beteckna en av delarna som innehåller oändligt många tal ur talföljden $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Vi återupprepar proceduren och får de slutna intervallen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$. Låt nu q_1 vara det första talet i talföljden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ som ligger i intervallet I_1, alltså $q_1 = X_m$. Antag att x_m är det första talet i följden som ligger i intervallet I_1. Låt då q_2 vara det första talet i den resterande talföljden $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots$ som ligger i intervallet I_2. Återupprepa denna procedur för att skapa talföljden $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $q_n \in I_n$. Vi har från ekv. 3.3 att
$$|A - f(q_n)| < \frac{1}{n}, \text{ d.v.s. } \lim_{n\to\infty} f(q_n) = A. \tag{3.4}$$
Enligt sats 2.12 finns det ett tal p sådant att $p \in I_n$ för alla heltal $n \geqslant 1$. Längden av intervallet I är $b - a$ vilket ger att längden av intervallet $I_n = (b-a)/2^n$. Eftersom både p och q_n finns i intervallet I_n gäller att
$$|p - q_n| < \frac{b-a}{2^n}, \text{ d.v.s. } \lim_{n\to\infty} q_n = p. \tag{3.5}$$

Från lemma 3.2 följer att

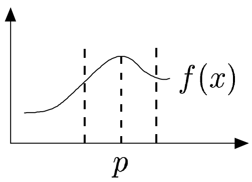
$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = A$$

vilket visar att

$$\sup_{x\in I} f(x) = f(p).$$

■

Definition 3.6 (Lokal maximipunkt). Funktionen f sägs ha en lokal maximipunkt i p om det existerar $\varepsilon > 0$ så att $f(x) \leqslant f(p)$ för alla x där $|x-p| < \varepsilon$.



På samma sätt kan vi förstås definiera en lokal minimipunkt. Vi bevisar nu att i en lokal maximipunkt är derivatan noll.

Sats 3.7. *Låt f vara definierad på intervallet $[a,b]$. Om f har ett lokalt maximum i punkten p och om $f'(p)$ existerar, så är $f'(p) = 0$.*

BEVIS: Tag en omgivning $(p-\delta, p+\delta)$ till punkten p, så att $a < p-\delta < p < p+\delta < b$. För alla x till vänster om p, d.v.s. $p-\delta < x < p$, gäller det att

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqslant 0$$

eftersom $f(x) \leqslant f(p)$ och $x < p$. Om vi skriver $x = p+h$ och låter $h \to 0$ (d.v.s. $x \to p$), så får vi

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f'(p) \geqslant 0$$

För alla x till höger om p gäller

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqslant 0$$

eftersom $f(x) \leqslant f(p)$ och $x > p$. Om vi låter $x \to p$ får vi, på samma sätt som ovan, att

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p) \leqslant 0$$

Vi har nu fått fram att $f'(p) \geqslant 0$ och $f'(p) \leqslant 0$. Enda möjligheten är att $f'(p) = 0$. ■

Sats 3.8 (Medelvärdessatsen). *Låt f vara kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, och deriverbar i (a, b). Då finns det en punkt $x_0 \in (a, b)$ så att*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0) \tag{3.6}$$

BEVIS: Låt oss definiera en ny funktion h på intervallet $[a, b]$ som

$$h(t) = \big(f(b) - f(a)\big)t - (b - a)f(t).$$

Funktionen h är helt klart kontinuerlig och deriverbar, med derivatan $h'(t) = \big(f(b) - f(a)\big) - (b - a)f'(t)$, eftersom f är kontinuerlig och deriverbar. Om vi kan visa att det finns en punkt x_0 så att $h'(x_0) = 0$, så har vi bevisat satsen (jämför $h'(x_0) = 0$ med ekv. (3.6)). Vidare gäller

$$h(b) = h(a) = af(b) - bf(a)$$

Låt oss först anta att h är konstant. I sådana fall kan vi välja x_0 till vilken punkt som helst i intervallet (a, b), eftersom derivatan av en konstant funktion är noll. Alltså, om h är konstant, så är $h'(x_0) = 0$ för alla $x_0 \in (a, b)$.

Låt oss nu anta att funktionen h inte är konstant; det betyder att det måste finnas en punkt $t \in (a, b)$ så att $h(t) \neq h(a)$; låt oss anta att $h(t) > h(a)$ ($h(t) < h(a)$ fallet är analogt). Detta leder, enligt Sats 3.5, till att det måste finnas en punkt $x_0 \in (a, b)$ där h antar sitt maximala värde. Eftersom h är deriverbar, vet vi, enligt Sats 3.7, att i sådana lokala maximipunkter är $h'(x_0) = 0$, vilket bevisar ekv. (3.6). ■

Övning 3.1. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärde att derivatan av

1. x^3 är $3x^2$.
2. $\frac{1}{x}$ är $-\frac{1}{x^2}$

Övning 3.2. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärde att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Övning 3.3. Bestäm konstanterna a, b och c så att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & , \text{då } x < 2 \\ a & , \text{då } x = 2 \\ bx + c & , \text{då } x > 2 \end{cases}$$

och dess derivata blir kontinuerliga funktioner.

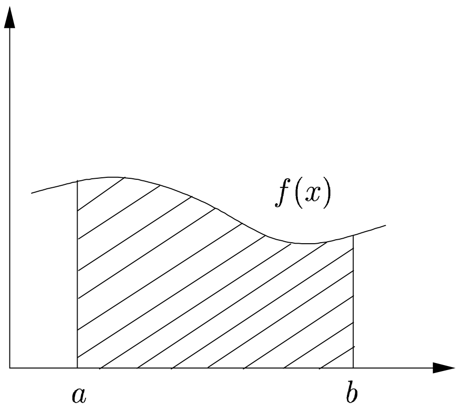
Övning 3.4. Visa att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

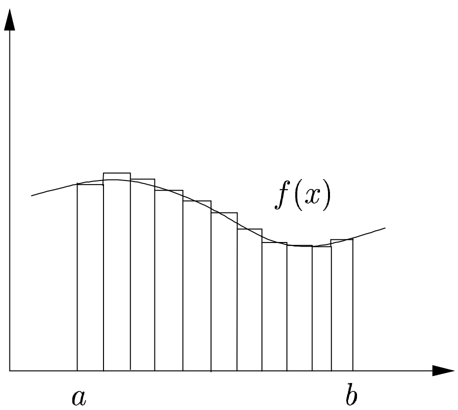
(Tips: Använd konjugatregeln, d.v.s $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.)

4 Integralen

Efter de mer inledande avsnitten om gränsvärden och kontinuerliga funktioner, ska vi ge oss in på titelämnet för detta kompendium – integraler. Det bakomliggande skälet till att införa integraler är att vi skulle vilja beräkna arean under grafen till funktionen f i intervallet $[a, b]$.



Idén är att approximera arean genom att beräkna arean av en antal rektanglar, som är inskrivna under grafen



Till rektangelns höjd tar man, som i bilden, något funktionsvärde i stapelns intervall. Vi kan tänka oss att om vi minskar bredden, d.v.s. väljer fler och fler staplar med mindre och mindre bredd, så kommer vi att få en bättre och bättre approximation till den riktiga arean. Vi ska beräkna arean genom att låta bredden av staplarna gå mot 0 och antalet mot oändligheten.

Låt $[a, b]$ vara ett intervall. En *uppdelning* P av intervallet $[a, b]$ är en mängd tal $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sådana att $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Antag att f är en begränsad funktion definierad på $[a, b]$, d.v.s. det finns en konstant c sådan att $|f(x)| \leqslant c$ för alla $x \in [a, b]$. Vi vill understryka att vi bara kommer att definiera integraler för begränsade funktioner i detta avsnitt.

Låt

$$
\begin{aligned}
M_i &= \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), && (4.1)\\
m_i &= \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x). && (4.2)
\end{aligned}
$$

Låt $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ och definiera *översumman* respektive *undersumman* av f m.a.p. uppdelningen P som

$$
\begin{aligned}
U(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i, && (4.3)\\
L(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i. && (4.4)
\end{aligned}
$$

Det är klart att $U(P, f) \geqslant L(P, f)$ eftersom $M_i \geqslant m_i$ för alla i.

Exempel 4.1. Låt $I = [0, 2]$ och definiera på I funktionen $f(x) = x^2$. Låt P vara uppdelningen $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{4}, 2$ av intervallet I. Vi har att

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{1}{2}, \Delta_2 = \frac{1}{2}, \Delta_3 = \frac{3}{4}, \Delta_4 = \frac{1}{4}\\
m_1 &= 0, m_2 = \frac{1}{4}, m_3 = 1, m_4 = \frac{49}{16}\\
M_1 &= \frac{1}{4}, M_2 = 1, M_3 = \frac{49}{16}, M_4 = 4
\end{aligned}
$$

Vi får därför

$$
\begin{aligned}
U(P, f) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{49}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{105}{64}, && (4.5)\\
L(P, f) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{49}{16} \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{251}{64}. && (4.6)
\end{aligned}
$$

▲

För olika uppdelningar P får vi olika värden på $U(P, f)$ och $L(P, f)$. Nu är tanken att vi vill hitta ett P_{min} som ger oss det *minsta* $U(P, f)$ och ett P_{max} som ger oss det *största* $L(P, f)$. Vi definierar *överintegralen* respektive *underintegralen* av f genom

$$
\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)\, dx &:= \inf_P U(P, f), && (4.7)\\
\underline{\int_a^b} f(x)\, dx &:= \sup_P L(P, f), && (4.8)
\end{aligned}
$$

där

$$
\begin{aligned}
\inf_P U(P, f) &:= \inf\{U(P, f) : P \text{ är en uppdelning av } I\}\\
\sup_P L(P, f) &:= \sup\{L(P, f) : P \text{ är en uppdelning av } I\}
\end{aligned}
$$

Om överintegralen och underintegralen är lika sägs f vara *integrerbar* och det gemensamma värdet kallas för *integralen* av f och skrivs

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.9}$$

Definition 4.2. Vi säger att Q är en *förfining* av en uppdelning P om $P \subset Q$.

Sats 4.3. *Om Q är en förfining av en uppdelning P då följer att*

$$L(P,f) \leqslant L(Q,f) \leqslant U(Q,f) \leqslant U(P,f). \tag{4.10}$$

BEVIS: Att $L(Q,f) \leqslant U(Q,f)$ är känt från tidigare. Vi väljer att visa att $U(Q,f) \leqslant U(P,f)$, att $L(P,f) \leqslant L(Q,f)$ följer på ett analogt vis. Antag att P är mängden $\{x_i\}_{i=0}^n$, där $x_i < x_j$ om $i < j$. Det räcker att visa att om vi låter P^* vara mängden P utökat med en punkt är $U(P^*,f) \leqslant U(P,f)$, ty genom att successivt addera alla punkter ur Q till P får vi $U(Q,f) \leqslant U(P,f)$. Antag vidare att förfiningen P^* innehåller talet x^* mellan x_{i-1} och x_i. Översummorna $U(P^*,f)$ och $U(P,f)$ är lika överallt utom bidraget av intervallet $[x_{i-1},x_i]$. Till översumman $U(P,f)$ blir bidraget

$$(x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \tag{4.11}$$

medan bidraget till översumman $U(P^*,f)$ blir

$$(x^* - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*} f(x) + (x_i - x^*) \sup_{x^* \leqslant x \leqslant x_i} f(x). \tag{4.12}$$

Det är klart att

$$\sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*} f(x) \leqslant \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \tag{4.13}$$

$$\sup_{x^* \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \leqslant \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x). \tag{4.14}$$

Vi har att

$$\begin{aligned}
(x^* - x_{i-1}) &\sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*} f(x) + (x_i - x^*) \sup_{x^* \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \\
&\leqslant ((x^* - x_{i-1}) + (x_i - x^*)) \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) \\
&\leqslant (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)
\end{aligned}$$

Alltså följer att bidraget av intervallet $[x_{i-1},x_i]$ till $U(P^*,f)$ är mindre än det till $U(P,f)$ och $U(P^*,f) \leqslant U(P,f)$. ∎

Vi vet att $L(P,f) \leqslant U(P,f)$ för en uppdelning P av ett intervall I. Men än så länge vet vi inte om $L(P_1,f) \leqslant U(P_2,f)$ för två uppdelningar P_1 och P_2 av I. Följande sats visar dock att detta gäller.

Sats 4.4. *Varje undersumma är mindre än varje översumma, d.v.s.*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{4.15}$$

Bevis: Låt P_1 och P_2 vara indelningar av intervallet $[a,b]$. Vi vill visa att $L(P_1,f) \leqslant U(P_2,f)$. Vi har att $Q = P_1 \cup P_2$ är en förfining av P_1 såväl som P_2. Från sats 4.3 har vi att

$$L(P_1,f) \leqslant L(Q,f) \leqslant U(Q,f) \leqslant U(P_2,f). \tag{4.16}$$

Vi gör ett motsägelsebevis. Antag motsatsen till (4.15), d.v.s.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx > 0, \tag{4.17}$$

d.v.s.

$$\sup_P L(P,f) - \inf_P U(P,f) > 0. \tag{4.18}$$

Det finns då en uppdelning P_s sådan att $L(P_s,f) - \inf_P U(P,f) > 0$. Det finns en uppdelning P_i sådan att $L(P_s,f) - U(P_i,f) > 0$. Detta är en motsägelse till att (4.16) gäller, alltså är antagandet (4.17) felaktigt och därmed är (4.15) sann. ∎

Exempel 4.5. Vi vill visa att

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}. \tag{4.19}$$

Vi kommer att utnyttja identiteten

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}(2k^3 + 3k^2 + k), \tag{4.20}$$

som kan bevisas med hjälp av induktion, vilket går utanför ramarna för denna kurs.

Låt P_n vara uppdelning $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, 2$ av intervallet $[0,2]$ och låt $f(x) = x^2$. Eftersom $M_i = \left(\frac{i}{n}\right)^2$ och $m_i = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ har vi att

$$\begin{aligned} U(P_n,f) &= \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{2n} i^2 \\ &= \frac{1}{6n^3}(2(2n)^3 + 3(2n)^2 + 2n) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^2} \to \frac{8}{3} \end{aligned}$$

då $n \to \infty$, vilket visar att $\inf_P U(P, f) \leqslant \frac{8}{3}$. Vi har även att

$$\begin{aligned}
L(P_n, f) &= \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} (i-1)^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} i^2 \\
&= \frac{1}{6n^3}(2(2n-1)^3 + 3(2n-1)^2 + 2n - 1) \\
&= \frac{1}{6n^3}(16n^3 - 12n^2 + 2n) = \frac{8}{3} - \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^3} \to \frac{8}{3},
\end{aligned}$$

då $n \to \infty$, vilket visar att $\sup_P L(P, f) \geqslant \frac{8}{3}$. Tillsammans får vi att

$$\inf_P U(P, f) \leqslant \frac{8}{3} \leqslant \sup_P L(P, f). \tag{4.21}$$

Vi vet från sats 4.4 att $\sup_P L(P, f) \leqslant \inf_P U(P, f)$ vilket ger att

$$\underline{\int_0^2} x^2\, dx = \overline{\int_0^2} x^2\, dx = \frac{8}{3}.$$

▲

Sats 4.6. *En funktion f definierad på ett slutet intervall I är integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en uppdelning P av I sådan att*

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon. \tag{4.22}$$

Bevis: Antag att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en uppdelning P sådan att $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Vi har att

$$L(P, f) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leqslant U(P, f), \tag{4.23}$$

vilket innebär att

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx < \varepsilon. \tag{4.24}$$

Eftersom (4.24) gäller för varje ε har vi att

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx, \tag{4.25}$$

d.v.s att f är integrerbar. Antag nu att

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \tag{4.26}$$

gäller. Vi vill visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en uppdelning P sådan att

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon. \tag{4.27}$$

Låt ε vara ett positivt tal. Då finns det en uppdelning P_1 sådan att

$$U(P_1, f) - \int_a^b f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.28}$$

och en uppdelning P_2 sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx - L(P_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.29}$$

Tillsammans har vi för förfiningen $P = P_1 \cup P_2$

$$U(P, f) \leqslant U(P_1, f) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, f) + \varepsilon \leqslant L(P, f) + \varepsilon. \tag{4.30}$$

Det vill säga

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon, \tag{4.31}$$

vilket vi ville visa. ■

Exempel 4.7. Skillnaden mellan översumman $U(P_n, f)$ och undersumman $L(P_n, f)$ i exempel 4.5 är

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{1}{n^3}(2n)^2 = \frac{4}{n}. \tag{4.32}$$

Detta visar att om vi ökar värdet på n så minskar skillnaden mellan över- och undersumman. Låt ε vara ett godtyckligt positivt reellt tal, då följer att $U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{4}{n} < \varepsilon$ om $n > \frac{4}{\varepsilon}$. Enligt Sats 4.6 är f integrerbar. ▲

För integraler gäller vissa räkneregler. Vi kommer att använda några av reglerna, så vi formulerar dem i en sats och bevisar en av dem.

Sats 4.8. *Låt f och g vara en integrerbara funktioner och låt a, b, c vara tal sådana att $a < b < c$. Då gäller*

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx \tag{4.33}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{4.34}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{4.35}$$

Bevis: Låt oss bevisa ekvation (4.33). För alla partitioner P så gäller det att

$$U(P, f+g) \leqslant U(P, f) + U(P, g). \tag{4.36}$$

Eftersom f och g är integrerbara så finns det, för varje $\varepsilon > 0$, en partition P_0, av intervallet $[a, c]$, så att

$$\begin{aligned} U(P_0, f) - \int_a^c f(x)\,dx &< \varepsilon \\ U(P_0, g) - \int_a^c g(x)\,dx &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Om vi adderar dessa olikheter får vi

$$U(P_0, f) + U(P_0, g) < \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx + 2\varepsilon \tag{4.37}$$

Per definition av integralen vet vi att

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \leqslant U(P, f+g)$$

för alla partitioner P. Speciellt kan vi använda oss av partitionen P_0

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \leqslant U(P_0, f+g)$$

Nu använder vi ekvation (4.36)

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \leqslant U(P_0, f+g) \leqslant U(P_0, f) + U(P_0, g)$$

Slutligen använder vi ekvation (4.37)

$$\begin{aligned} \int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx &\leqslant U(P, f+g) \leqslant U(P_0, f) + U(P_0, g) \\ &< \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Eftersom ε är godtyckligt, så drar vi slutsatsen att

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx \tag{4.38}$$

Om vi nu kan visa att

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \geqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx$$

så har vi visat satsen. Detta kan vi göra genom att notera att för alla partitioner gäller det att

$$L(P, f+g) \geqslant L(P, f) + L(P, g)$$

Vi kan nu, precis som ovan, finna en partition P_1 så att

$$\int_a^c f(x)\,dx - L(P_1, f) < \varepsilon$$
$$\int_a^c g(x)\,dx - L(P_1, g) < \varepsilon.$$

Analogt med resonemanget ovan får vi

$$\begin{aligned}\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx &\geqslant L(P_1, f+g) \geqslant L(P_1, f) + L(P_1, g)\\ &> \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx - 2\varepsilon\end{aligned}$$

Alltså

$$\int_a^c \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \geqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx$$

Detta, tillsammans med ekvation (4.38), visar att

$$\int_a^c \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx$$

■

Övning 4.1. Visa att det för varje $\varepsilon > 0$ existerar en partition P, av intervallet $[0, 1]$, så att

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

där $f(x) = x$. Detta visar att f är integrerbar.

5 Integrerbarhet

Sats 5.1. *Låt f vara en integrerbar funktion definierad på intervallet $[a, b]$. För varje $\varepsilon > 0$ existerar det en uppdelning $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sådan att*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i \right| < \varepsilon,$$

där t_i är en godtycklig punkt i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Bevis: Då $m_i \leqslant f(t_i) \leqslant M_i$, eftersom m_i och M_i är det minsta respektive största funktionsvärdet i intervallet, har vi att

$$L(P, f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i \leqslant U(P, f).$$

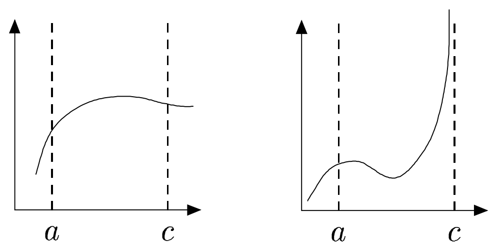
Satsen följer nu eftersom

$$L(P, f) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant U(P, f).$$

■

Definition 5.2. En funktion f sägs vara *likformigt kontinuerlig* på D_f om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ om $|x - y| < \delta$.

Vad är nu skillnaden på kontinuitet och likformig kontinuitet? Låt oss ta ett exempel på detta.



Båda dessa funktioner är kontinuerliga i det öppna intervallet (a, c). Funktionen i den vänstra bilden är dessutom likformigt kontinuerlig, vilket inte är sant för funktionen i den högra bilden. Som ni kanske misstänker så är det i närheten av punkten c som det uppstår problem. Antag att $\varepsilon > 0$ är givet. Oavsett hur litet δ vi än väljer, så kan vi, genom att gå tillräckligt nära punkten c, alltid hitta punkter x och y så att

$$|f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

vilket betyder att funktionen inte är likformigt kontinuerlig på intervallet (a, c). Notera att funktionen dock är likformigt kontinuerlig till exempel på intervallet (a, b), där $a < b < c$.

Sats 5.3. *Om en funktion f är kontinuerlig på ett slutet intervall $[a, b]$ är f likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.*

BEVIS: Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att f är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på $I_0 = [a, b]$. Att f är kontinuerlig säger att för varje $\varepsilon > 0$ och varje $x_0 \in I_0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ om $|x - x_0| < \delta$. Att f inte är likformigt kontinuerlig betyder att det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att hur litet vi än väljer $\delta > 0$ så finns alltid x och y sådana att $|x - y| < \delta$ och $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.

Låt oss välja δ i en avtagande följd. Inför $\delta_k = \frac{1}{k}$. Det finns nu x_k och y_k i I_0 sådana att $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ och $|f(x_k) - f(y_k)| \geqslant \varepsilon$. Dela nu intervallet I_0 i två lika stora delar $[a, (a + b)/2]$ och $[(a + b)/2, b]$. Eftersom talföljden $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ innehåller oändligt många element måste minst ett av dessa två intervall innehålla oändligt många x_k, kalla detta intervall I_1. Nu återupprepar vi proceduren. Vi har fått en inklusion av intervall $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ som alla innehåller oändligt många element ur talföljden $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Enligt sats 2.12 finns det ett tal z som ligger i alla I_n.

Då f är kontinuerlig i z kan vi välja ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ om $|x - z| < \delta$. Vi har att $|x_k - z|$ är högst längden av I_n vilket är $\frac{a+b}{2^n}$ för alla $x_k \in I_n$ och $|y_k - z| \leqslant |y_k - x_k| + |x_k - z| < \frac{1}{k} + \frac{a+b}{2^n}$ för alla $x_k \in I_n$. Välj nu n och k så stora att $|x_k - z|$ och $|y_k - z|$ är mindre än δ. Vi har att $|f(x_k) - f(y_k)| \leqslant |f(x_k) - f(z)| + |f(z) - f(y_k)| < \varepsilon$ eftersom f var kontinuerlig i z. Men detta motsäger att f inte var likformigt kontinuerlig eftersom för x_k och y_k hade vi att $|f(x_k) - f(y_k)| \geqslant \varepsilon$. Alltså är f likformigt kontinuerlig. ■

Sats 5.4. *Om f är kontinuerlig i intervallet $[a, b]$, så är f även integrerbar på intervallet $[a, b]$.*

BEVIS: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Välj α så att $(b-a)\alpha < \varepsilon$. Från sats 5.3 har vi att f är likformigt kontinuerlig, så det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(y)| < \alpha$ om $|x - y| < \delta$ och $x, y \in [a, b]$. Låt P vara en godtycklig uppdelning sådan att $\Delta_i < \delta$ för alla i då följer att $M_i - m_i < \alpha$ och därför

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} \alpha\Delta_i \leqslant (b - a)\alpha < \varepsilon.$$

Eftersom ε var godtyckligt så betyder det att för *varje* $\varepsilon > 0$ så finns det en uppdelning P sådan att

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

Då är f integrerbar enligt Sats 4.6. ■

Definitionen av integralen lämnar inte många praktiska tips om hur man kan gå till väga för att beräkna en integral. Naturligtvis går det att följa proceduren med att beräkna över- och undersummor, men det är, som ni har sett, en ganska krånglig väg.

I detta avsnitt ska vi visa att det finns ett mycket enklare sätt att beräkna integraler, som bygger på att det finns ett samband mellan integrering och derivering. Vi bevisar att integrering och derivering är *omvända* operationer, d.v.s. integrerar vi en funktion och sedan deriverar resultatet så får vi tillbaka funktionen vi började med, nämligen

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{5.1}$$

Detta leder fram till *Integralkalkylens huvudsats*, och med de följande två satserna bevisar vi denna relation mellan integrering och derivering.

Sats 5.5. *Låt f vara en integrerbar funktion på intervallet $[a,b]$. För varje $x \in [a,b]$, definiera $F(x)$ som*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \tag{5.2}$$

Funktionen F är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Om f är kontinuerlig i punkten $x_0 \in [a,b]$ så är F deriverbar i x_0, och

$$F'(x_0) = f(x_0) \tag{5.3}$$

Bevis: Vi börjar med att visa det första påståendet – att F är kontinuerlig. Eftersom f antas vara integrerbar måste den vara begränsad, d v s för något M är $|f(t)| \leqslant M$ för alla $t \in [a,b]$. Tag nu x och y så att $a \leqslant x < y \leqslant b$. Från definitionen i (5.2), av $F(x)$, fås att

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|$$

eftersom $x < y$, enligt Sats 4.8. Nu kan vi använda oss av att vi vet att f är begränsad av M, vilket gör att vi kan skriva

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M(y - x)$$

eftersom integralen helt klart är begränsad av funktionens maximala värde M multiplicerat med intervallets längd $y - x$. Detta betyder att givet vilket $\varepsilon > 0$ som helst så kan vi, genom att välja

$$|y - x| < \frac{\varepsilon}{M}$$

se till att

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M|y - x| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Per definition betyder detta att F är kontinuerlig. (Gå gärna tillbaka till definitionen av kontinuitet om du känner dig osäker på detta.)

Låt oss nu visa det andra påståendet – att för varje x_0 där f är kontinuerlig gäller att

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Hur kan vi bära oss åt för att visa detta? Låt oss sätta in definitionen av derivata i uttrycket $F'(x_0) - f(x_0)$

$$F'(x_0) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)$$

Låt oss nu istället använda variabeln $x = x_0 + h$, vilket ger

$$F'(x_0) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)$$

Genom att sätta in vad $F(x)$ är (ekv. (5.2)), fås

$$\begin{aligned} F'(x_0) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \Big(F(x) - F(x_0) \Big) - f(x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t) dt - f(x_0) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nu vill vi försöka skriva $f(x_0)$ innanför integraltecknet. Eftersom vi vet att

$$\int_{x_0}^{x} dt = x - x_0,$$

kan vi skriva

$$f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} f(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{x - x_0} f(x_0) \int_{x_0}^{x} dt = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\, dt$$

eftersom $f(x_0)$ inte beror av x. Nu sätter vi in detta i ekvation (5.4)

$$\begin{aligned} F'(x_0) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\, dt \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \Big(f(t) - f(x_0) \Big)\, dt \end{aligned}$$

Om vi kallar det största värdet av $f(t) - f(x_0)$, i intervallet $[x_0, x]$, för $M(x)$, kan vi begränsa integralens värde med $M(x)$ multiplicerat med intervallets längd $x - x_0$.

$$\begin{aligned} F'(x_0) - f(x_0) &\leqslant \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} (x - x_0) M(x) \\ &= \lim_{x \to x_0} M(x) \end{aligned}$$

När $x \to x_0$ så går $f(t)$, i integralen, mot $f(x_0)$, vilket leder till att

$$\lim_{x \to x_0} M(x) = 0.$$

Vi har då visat att

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

■

Nu kommer vi till den sats som ger oss ett kraftfullt verktyg för att kunna beräkna integraler i praktiken.

Sats 5.6 (Integralkalkylens huvudsats). *Låt f vara en integrerbar funktion på intervallet $[a,b]$. Om det finns en funktion F på $[a,b]$, så att $F' = f$, då gäller det att*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{5.5}$$

Bevis: Tag ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Eftersom f är integrerbar så kan vi välja en partition $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ av intervallet $[a,b]$, så att $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ (enligt Sats 4.6). Nu vill vi använda Medelvärdessatsen (3.8) på varje litet intervall. Medelvärdessatsen säger oss att det finns punkter $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ så att om $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, så är

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)\Delta_i = f(t_i)\Delta_i$$

Genom att summera över alla i får vi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Nu skulle vi vara färdiga om den summa vi har till vänster i ekvationen var en integral istället. Men enligt vårt antagande om att $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ skiljer sig denna summa endast med ε från integralen (enligt Sats 5.1). Därför får vi att

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \Big(F(b) - F(a)\Big) \right| < \varepsilon$$

Notera nu att detta skall gälla för *alla* $\varepsilon > 0$. Detta medför att värdet på uttrycket måste vara lika med noll. Alltså

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

■

Övning 5.1. Beräkna

$$\int_1^2 x^3 \, dx$$

Övning 5.2. Beräkna

$$\int_0^1 x^n \, dx$$

för *alla* n.

Övning 5.3. Beräkna

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx$$

6 Integrationstekniker

Sats 5.6, "Integralkalkylens huvudsats", gav oss ett verktyg som vi kan använda oss av vid beräkning av integraler. Allt vi behöver göra är att finna en funktion vars derivata sammanfaller med funktionen vi vill integrera. Enkelt, eller hur? Nu är det inte så enkelt som det låter, och vi ägnar större delen av detta avsnitt till att visa på olika tekniker för beräkna integraler.

Integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

kallar vi en *bestämd* integral, eftersom vi har "bestämt" integrationsgränserna a och b. Vi definierar

$$\int f(x)\,dx := \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

och kallar integralen för en *obestämd* integral. Lägg märke till att a är godtycklig i detta uttryck. Vi sätter $C = -F(a)$ och inför skrivsättet

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

där vi kallar F den *primitiva funktionen* till f. Att C är godtycklig inser vi genom att derivatan av $F(x) + C$ är densamma oberoende av vad C tar för värde, eftersom derivatan av en konstant är noll.

När vi väl känner till den primitiva funktionen F, är det en smal sak att beräkna bestämda integraler för funktionen. Vi använder ofta följande skrivsätt med hakparenteser

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{6.1}$$

Lägg märke till att jag i (6.1) utelämnade konstanten C. Detta är tillåtet eftersom C förekommer i båda termerna i följande differens

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) + C - \big(F(a) + C\big) = F(b) - F(a)$$

Det är dock viktigt att komma ihåg att den primitiva funktionen bara är bestämd upp till addition av en konstant.

Exempel 6.1. Vi säger att $\frac{x^2}{2}$ är en primitiv funktion till x eftersom $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} = \frac{2x}{2} = x$ (gå tillbaka till Exempel 2.26). Vi skriver

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Med hjälp av den primitiva funktionen kan vi räkna ut alla bestämda integraler, såsom

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$$

▲

Exempel 6.2.

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

Deriverar vi $-\cos(x) + C$ får vi $-\big(-\sin(x)\big) = \sin(x)$. ▲

Vi noterar att den primitiva funktionen till $f+g$ är $F+G$, eftersom $\big(F+G\big)' = f + g$. Med hjälp av huvudsatsen kan vi nu enkelt verifiera vilka räkneregler som gäller för integraler.

Sats 6.3. *För integraler gäller följande likheter*

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{6.2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b) \tag{6.3}$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{6.4}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{6.5}$$

Bevis: Bevis av ekv. (6.2)

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx &= [F(x) \pm G(x)]_a^b \\ &= F(b) \pm G(b) - \big(F(a) \pm G(a)\big) \\ &= F(b) - F(a) \pm \big(G(b) - G(a)\big) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Bevis av ekv. (6.3)

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Bevis av ekv. (6.4)

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = [cF(x)]_a^b = c\Big(F(b) - F(a)\Big)$$
$$= c\int_a^b f(x)\,dx$$

Bevis av ekv. (6.5)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\Big(F(a) - F(b)\Big) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

■

Övning 6.1. Integrera

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx$$

(Tips: Tänk på kedjeregeln för derivering)

Övning 6.2. Integrera

$$\int \Big(\sin(x) + x\cos(x)\Big)\,dx$$

(Tips: Tänk på produktregeln för derivering)

I de föregående exemplen gissar vi oss lätt till vad integralen skall vara utifrån vår kunskap om elementära funktioners derivator. Om vi tar något lite mer komplicerat, t ex

$$\int xe^x\,dx$$

så är det inte så lätt att gissa längre. När det gäller integrering så finns det en hel del knep för att finna de primitiva funktionerna. Här ska vi beskriva två av dem – *partiell integration* och *variabelsubstitution.*

Partiell integration

Vid derivering av en produkt av två funktioner, använder vi produktregeln för att räkna ut derivatan

$$(FG)' = F'G + FG' \tag{6.6}$$

Alltså, om vi vet de enskilda funktionernas derivata, så kan vi räkna ut produktens derivata.

Exempel 6.4. Derivera $x^2 \sin(x)$.

$$\frac{d}{dx} x^2 \sin(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

▲

Gäller samma sorts "räkneregel" för integraler? Tyvärr räcker det inte att känna till de primitiva funktionerna för F och G för att kunna beräkna den primitiva funktionen till FG. Däremot kan vi komma en bit på vägen med hjälp av *partiell integration* (alt. *partialintegrering*).

Sats 6.5 (Partiell integration). *Antag att F och G är deriverbara funktioner samt att F' och G' är integrerbara. Då gäller*

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x)G(x)\,dx \tag{6.7}$$

BEVIS: Definiera funktionen $H = FG$. Deriverar vi H får vi (med hjälp av produktregeln för derivering)

$$H' = F'G + FG'$$

Nu integrerar vi likheten med hjälp av huvudsatsen (5.6) och Sats 6.3

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= \int_a^b H'\,dx = \int_a^b \Big(F'G + FG'\Big) \\ &= \int_a^b F'G\,dx + \int_a^b FG'\,dx \end{aligned}$$

Genom att flytta över en av termerna fås

$$\begin{aligned} \int_a^b FG'\,dx &= H(b) - H(a) - \int_a^b FG'\,dx \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'G\,dx \end{aligned}$$

■

Observera att svaret vi får genom att använda ekvation (6.7) fortfarande innehåller en integral, vilket gör att man vid första anblicken kanske tvivlar på dess användbarhet. Att det för integraler inte existerar en lika enkel formel, som ekvation (6.6) för derivering, gör att integrering i allmänhet är svårt. Det visar sig dock att man kan ha mycket nytta av partialintegrering i praktiken.

Exempel 6.6. Integrera

$$\int xe^x\,dx$$

Vi försöker använda oss av partiell integration och sätter $F(x) = x$ och $G'(x) = e^x$. Detta ger oss direkt $F'(x) = 1$ och $G(x) = \int e^x\,dx = e^x$ (vi påminner oss om att $\big(e^x\big)' = e^x$). Om vi sätter in detta in ekv. (6.7) får vi

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

▲

Genom att vara lite listiga kan vi använda partiell integrering för att beräkna integraler av en rad speciella funktioner.

Exempel 6.7 (Naturliga logaritmen). Vad är den primitiva funktionen till $\ln(x)$? Vi vet att derivatan är $1/x$, men har ingen aning om vad integralen kan tänkas vara. Nu kommer vi till den listiga biten; skriv integralen som

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$$

Använd nu partiell integrering med $F(x) = \ln(x), G'(x) = 1$ vilket ger $F'(x) = 1/x, G(x) = x$. Från ekv. (6.7) fås

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C$$

Detta lilla "trick" går också att utföra på t ex de inversa trigonometriska funktionerna $\arcsin(x)$ och $\arccos(x)$.

▲

Variabelsubstitution

Vi påminner oss om kedjeregeln för derivering

$$\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \tag{6.8}$$

Exempel 6.8. Derivera $\sin(x^2)$. Vi sätter $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = x^2$, vilket ger oss

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = \frac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

▲

Det finns en mycket användbar variant av denna formel för integraler; man brukar kalla förfarandet för variabelsubstitution.

Sats 6.9 (Variabelsubstitution). *Låt g vara deriverbar och låt f och g' vara integrerbara funktioner på intervallet $[a, b]$. Då gäller*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \tag{6.9}$$

Bevis: Definiera funktionen $H(x) = F(g(x))$, där F betecknar den primitiva funktionen till f. Derivatan av H blir (med hjälp av kedjeregeln för derivering)

$$H'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Nu integrerar vi H' med hjälp av huvudsatsen

$$H(b) - H(a) = \int_a^b H'(x)\,dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

Eftersom $F' = f$ kan vi skriva om vänsterledet i denna likhet som en integral

$$H(b) - H(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Vilket slutligen ger oss att

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

■

Exempel 6.10. Beräkna

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)^2}{x}\,dx$$

Vi noterar nu att $1/x$ är derivatan av $\ln(x)$; därför har vi en integral på formen (6.9), med $f(x) = x^2$ och $g(x) = \ln(x)$. Formeln för variabelsubstitution ger oss

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)^2}{x}\,dx = \int_0^{\ln 2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^3}{3}$$

(Kom ihåg att $\ln 1 = 0$.) Om vi vill komma åt den primitiva funktionen så hoppar vi över att sätta in några gränser, men vi måste ersätta t med $\ln x$, vilket ger oss

$$\int \frac{\ln(x)^2}{x}\,dx = \frac{\ln(x)^3}{3} + C.$$

▲

Exempel 6.11. Integrera

$$\int \tan(x)\,dx$$

Vi skriver om $\tan(x)$ som

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \sin(x)\,dx$$

Eftersom derivatan av $\cos(x)$ är $-\sin(x)$ kan vi använda oss av variabelsubstitution med $f(x) = 1/x$ och $g(x) = \cos(x)$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \sin(x)\,dx = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln(t) + C = -\ln\big(\cos(x)\big) + C$$

där vi har fått lägga till ett minustecken för att kompensera för minustecknet i derivatan av $\cos(x)$. ▲

I dessa exempel har vi använt oss av att vi har känt igen kombinationen "funktion$\times$inre derivata". Istället för att göra detta kan vi använda ekv. (6.9) åt andra hållet.

Exempel 6.12 (Cirkelns ekvation). Hitta den primitiva funktionen till halvcirkeln $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Integralen blir

$$\int f(t)\,dt = \int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Låt oss nu sätta $f(x) = \sqrt{1-x^2}, t = g(x) = \sin(x)$ i ekv. (6.9).

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\,dx = \int \cos^2(x)\,dx$$

eftersom "trigonometriska ettan" säger att $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$. Nu har vi fått en ny integral; är den enklare? Ja, eftersom $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ får vi

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int\,dx$$

Dessa två integraler klarar vi av att lösa

$$\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int\,dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}\Big(\sin(x)\cos(x) + x\Big)$$

I det sista steget har vi använt att $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Vill vi ha svaret i variabeln t (som vi började med) måste vi stoppa tillbaka vad x är uttryckt i t. Den inversa funktionen till sinus kallas för arcsinus och skrivs som $\arcsin(x)$. Då $t = \sin(x)$ är alltså $x = \arcsin(t)$, och vi får svaret

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\cos\big(\arcsin(t)\big) + \frac{1}{2}\arcsin(t) + C. \tag{6.10}$$

Vi drar slutsatsen att, genom att använda oss av ganska enkla metoder, har vi integrerat en funktion där vi aldrig kunde ha gissat oss till svaret.

▲

Övning 6.3. Visa att ekv. (6.10) verkligen är den primitiva funktionen till $\sqrt{1-t^2}$ genom att derivera. Du behöver känna till följande derivata

$$\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

och den trigonometriska likheten

$$\cos\big(\arcsin(t)\big) = \sqrt{1-t^2}$$

Övning 6.4. Integrera

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Övning 6.5. Integrera

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Övning 6.6. Integrera

$$\int \arcsin(x)\,dx$$

(Tips: Tänk på hur vi integrerade logaritmfunktionen.)

Övning 6.7. Integrera

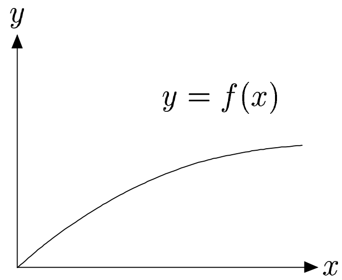
$$\int x^2 e^x\,dx$$

(Tips: Partialintegrera två gånger.)

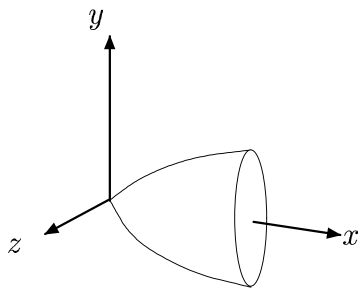
7 Rotationsintegraler

Att beräkna integralen av en funktion är ett sätt att beräkna arean som begränsas av x-axeln och funktionsgrafen. Det finns dock ett sätt att enkelt beräkna volymer av vissa kroppar med hjälp av integraler, så kallade *rotationskroppar.*

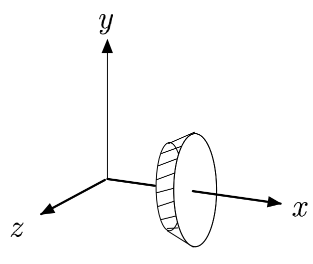
Låt oss anta att grafen av f ser ut som



Om vi tänker oss att vi roterar grafen runt x-axeln, så uppkommer följande *rotationskropp*



Hur kan vi beräkna volymen av denna kropp? Vi tar en partition $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ av x-axeln, och definierar $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Sedan tänker vi oss att vi i varje punkt x_i skär ut en tunn skiva av rotationskroppen, med tjockleken Δ_i.



Volymen av skivan är ungefär lika med volymen ΔV_i, av en cylinder med radien $f(x_i)$ och bredden Δ_i.

$$\Delta V_i = \pi f(x_i)^2 \Delta_i$$

Genom att lägga ihop alla dessa skivor kan vi approximativt beräkna volymen som

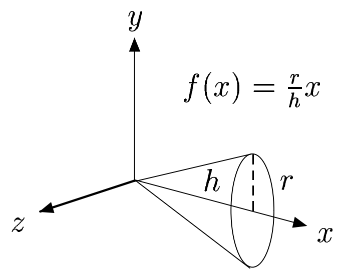
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta_i$$

När tjockleken på skivorna går mot noll och om f^2 är integrerbar, så går denna summa mot integralen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \tag{7.1}$$

enligt Sats 5.1. Låt oss nu med hjälp av denna formel beräkna några välkända volymer.

Exempel 7.1 (Volymen av en kon). Låt oss beräkna volymen av en kon med höjden h och en (cirkulär) bottenyta vars radie är r. Vi får en kon om vi roterar en rät linje, som går genom origo, kring x-axeln. Exakt vilken rät linje ska vi rotera? Om vi tänker efter lite så inser vi att linjen ska vara sådan att när $x = h$ så ska $y = r$. Detta får vi genom att ta $f(x) = \frac{r}{h}x$.



Nu använder vi oss av ekvation (7.1) för att beräkna volymen.

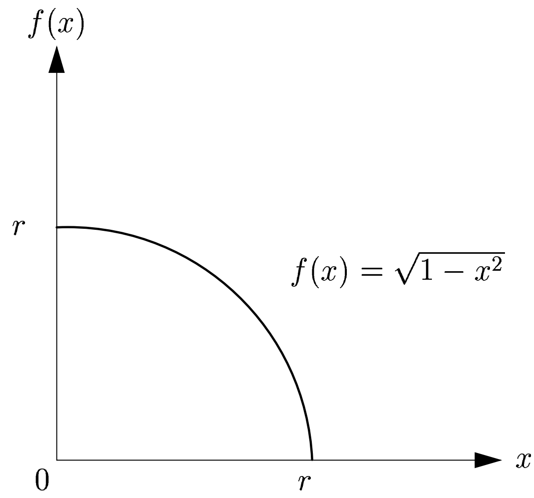
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{r^2 h^3}{3h^2} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Detta svar stämmer överens med vad vi vet från elementär geometri. ▲

Exempel 7.2 (Klotets volym). Låt oss beräkna volymen av ett klot. Som ni kanske redan misstänker så ska vi beräkna volymen genom att rotera en cirkel. En cirkel med radien r fås av de punkter x och y som uppfyller $x^2 + y^2 = r^2$. Ur detta uttryck kan vi lösa ut y

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

För att göra det enkelt för oss noterar vi att om vi roterar grafen av en fjärdedels cirkel kring x-axeln



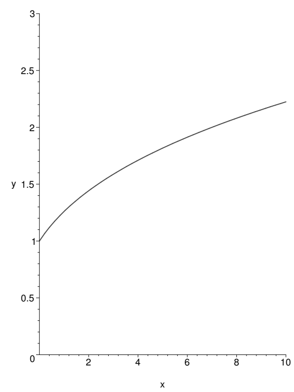
så får vi ett halvt klot. Alltså blir hela klotets volym två gånger rotationsintegralen av y

$$V = 2\pi \int_0^r y^2\,dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \frac{2r^3}{3}$$
$$= \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ett svar som vi väl känner igen från geometrin. ▲

Övning 7.1. Beräkna volymen av den rotationskropp, begränsad av $x = 0$ och $x = 1$, som uppkommer då vi roterar $f(x) = x^2$ kring x-axeln.

Övning 7.2. Genom att rotera funktionen $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$

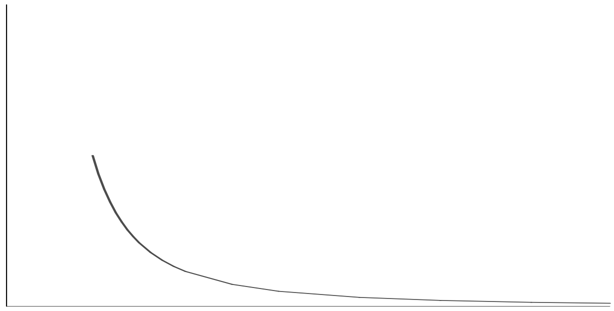


får vi någonting som med lite vilja kan tänkas likna ett vattenglas. Antag att du vill mäta upp exakt 4 volymenheter av vatten i glaset. Hur högt upp i glaset skall du fylla?

Övning 7.3. Beräkna volymen av den rotationskropp, begränsad av $x = 0$ och $x = \pi/2$, som uppkommer då vi roterar $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ kring x-axeln.

8 Generaliserade integraler

Vi har hitintills ägnat oss åt att beräkna areor och volymer i ett begränsat intervall. Kan vi bringa någon mening i att räkna ut arean under *hela* den följande delen av grafen till $f(x) = 1/x^2$?



Det skulle motsvara en integral av typen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \tag{8.1}$$

Är detta då inte bara nonsens? Arean måste väl vara oändlig? För det första måste vi erinra oss om att det *inte* är tillåtet att sätta $b = \infty$ i vår definition av integralen. Å andra sidan så vet vi att resultatet av att lägga ihop oändligt många tal som minskar, kan vara ändligt.

Exempel 8.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \approx 1.644934068$$

(Detta är det svar som fås om man med datorns hjälp beräknar summan av de första tio miljarder termerna.) ▲

På samma sätt kan faktiskt en area över ett obegränsat område vara ändlig. Vi gör följande definition av en *generaliserad integral*

Definition 8.2 (Generaliserad integral).

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx \tag{8.2}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx \tag{8.3}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx \tag{8.4}$$

Om gränsvärdet existerar (d.v.s. är ändligt) kallar vi integralen *konvergent*. Om gränsvärdet inte existerar kallar vi integralen *divergent*.
Vi säger att integralen (8.4) är konvergent om båda integralerna i högerledet är konvergenta.

Exempel 8.3. Konvergerar integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad ?$$

Enligt definitionen ovan så beräknar vi gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}+1 = 1$$

Integralen är konvergent och har värdet 1. ▲

Exempel 8.4. Konvergerar integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad ?$$

Vi beräknar gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\ln(t) = \infty$$

Integralen är således divergent. ▲

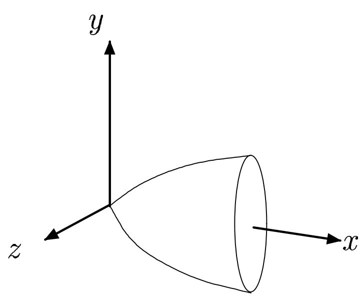
Av dessa exempel lär vi oss att konvergensen av en generaliserad integral i allra högsta grad beror på vilken funktion vi integrerar. Den "lilla" skillnaden att vi har $\frac{1}{x^2}$, i stället för $\frac{1}{x}$, i det första exemplet gör att integralen konvergerar. Detta är nära relaterat till konvergensen/divergensen av följande summor

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \approx 1.644934068$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$$

Mantelytan av en rotationskropp

Precis som vi beräknade volymen av rotationskroppen

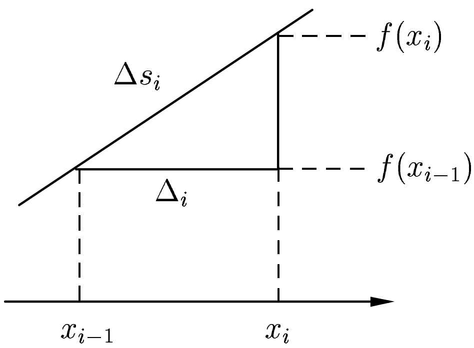


kan vi också beräkna dess area. Vi tar en partition $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ av intervallet $[a, b]$. För varje x_i kan vi approximera skivans mantelyta med mantelytan ΔA_i, av en cylinder med radie $f(x_i)$. Den lilla komplikation som tillkommer är att vi tyvärr inte kan välja Δ_i som bredd, utan måste välja Δs_i, som betecknar sträckan från x_{i-1} till x_i *längs* ytan.

$$\Delta A_i = 2\pi f(x_i)\Delta s_i$$

Skälet till denna "komplikation" är att felet vi gör när vi väljer Δ_i, vid beräkning av volym, är litet jämfört med volymen. När det gäller ytan är samma fel, om vi skulle välja Δ_i, *inte* litet i förhållande till arean.

För små Δ_i är Δs_i längden av den räta linjen



Vi räknar ut Δs_i med hjälp av Pythagoras sats.

$$\left(\Delta s_i\right)^2 = \Delta_i^2 + \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)^2 = \left[1 + \left(\frac{f(x_{i-1} + \Delta_i) - f(x_{i-1})}{\Delta_i}\right)^2\right]\Delta_i^2$$

Nu kan vi summera över alla delar för att få den totala arean

$$A \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta s_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i-1} + \Delta_i) - f(x_{i-1})}{\Delta_i}\right)^2}\,\Delta_i$$

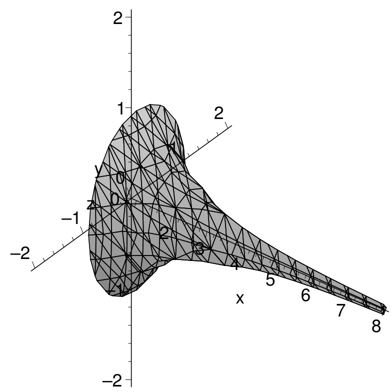
När $\Delta_i \to 0$ så går denna summa mot integralen

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \tag{8.5}$$

enligt Sats 5.1, om $f\sqrt{1 + \left(f'\right)^2}$ är integrerbar.

Gabriels horn eller Torricellis trumpet

Evangelista Torricelli (1608-1647) var en italiensk fysiker och matematiker som studerade för munken Benedetto Castelli – professor i matematik på Collegio di Sapienza i Rom. 1641 åkte han till Florence för att studera för Galileo, men tyvärr gick det bara ett par månader tills det att Galileo avled i januari 1642. Torricelli är mest känd för att ha konstruerat den första barometern 1643. Hans namn lever kvar genom enheten *torr*, som motsvarar $101365/760 = 133.375$ Pascal. Torricelli upptäckte att om man roterar grafen till $f(x) = 1/x$ kring x-axeln så får man en rotationskropp med oändlig area och ändlig volym.



Detta tyckte Torricelli var en mycket märklig egenhet, och han räknade ut volymen och arean på många olika sätt bara för att komma fram till samma resultat. Det är överraskande att en ändlig volym kan vara innesluten i en oändlig area.

Detta leder till den skenbara paradoxen att om vi skulle försöka måla Gabriels horn, så skulle det krävas en oändlig mängd färg för att måla det, men bara en ändlig mängd färg för att fylla det.

Detta är, som sagt, endast en skenbar paradox som har sin lösning i att det är en enorm skillnad mellan en oändlig *yta* och en oändlig *volym*. Färg, t.ex., är något som är tredimensionellt i allra högsta grad och upptar en ändlig volym. När vi talar om att måla en tvådimensionell yta, så försöker vi göra det med färg som är tredimensionell. Skulle vi däremot kunna göra färgen oändligt tunn, så skulle vi kunna måla hornet med en ändlig mängd färg.

Nog med utvikningar; låt oss beräkna hornets volym med hjälp av våra kunskaper om rotationskroppar och generaliserade integraler. Volymen kan vi skriva som

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{t\to\infty} \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \pi\Big(-\frac{1}{t}+1\Big) = \pi$$

Integralen är med andra ord konvergent, och det krävs π volymenheter av “färg” för att fylla hornet.

Nu försöker vi räkna ut arean av Gabriels horn. Genom att använda ekv. (8.5) får vi att

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)^2}\, dx$$

Det är lite trickigt att integrera detta explicit (se dock övningarna), så vi ska med hjälp av en olikhet visa att integralen divergerar. Vi noterar att det som står inuti rottecknet alltid kommer att vara större än 1, vilket betyder att roten ur detta tal alltid kommer att vara större än 1. Om $f \leqslant g$ på ett intervall $[a, b]$, så är

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Denna "sats" kan enkelt bevisas genom att studera under- och översummorna för de två integralerna. Om vi tillämpar detta på vår integral får vi

$$A = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx \geqslant 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

enligt tidigare uträkningar. Alltså är arean av Gabriels horn oändlig.

Övning 8.1. Beräkna

$$\int_0^\infty xe^x\,dx$$

Övning 8.2. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx$$

Övning 8.3. Integrera

$$\int \frac{1}{t}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$

(Tips: Gör först en variabelsubstitution med $g(x) = \sqrt{x}$, och sedan en partialintegrering med $G'(x) = 1/x^2$.)

Övning 8.4. Beräkna

$$\int_2^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)dx$$

9 Appendix – Gammafunktionen

Vi ska nu visa att det i vissa fall är praktiskt att definiera funktioner med hjälp av integraler. Låt oss först införa en funktion som kallas *fakultet*.

Definition 9.1 (Fakultet). Låt n vara ett positivt heltal. Vi definierar fakulteten av n, $n!$, som

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \tag{9.1}$$

Vi definierar också att $0! = 1$.

Exempel 9.2. Vi har $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$. ▲

Denna funktion används mycket i sannolikhetslära och kombinatorik, där $n!$ talar om för oss på hur många olika sätt vi kan ordna n saker i en rad. Fakultetsfunktionen gäller för positiva heltal, men skulle vi kunna definiera fakulteten av $1/2$? I sådana fall skulle vi vilja ha en funktion som är definierad för *alla* positiva x, och för ett heltal ska värdet av funktionen vara lika med fakulteten av talet. Den funktion man väljer kallas $Gammafunktionen$.

Definition 9.3 (Gammafunktionen). För alla $x > 0$ definierar vi

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \tag{9.2}$$

Detta är en generaliserad integral, och den första frågan vi ställer oss är naturligvis: konvergerar integralen?

Sats 9.4. *$\Gamma(x)$ konvergerar för alla $x > 0$.*

Bevis: Låt oss skriva om exponenten inuti integralen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2}\,dt$$

Eftersom $\lim_{t\to\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$ (oberoende av $x > 0$), så kan vi alltid hitta ett tal T så att

$$t^{x-1}e^{-t/2} \leqslant 1 \quad \text{för alla } t \geqslant T$$

Vi får följande olikhet

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2}\,dt \leqslant \int_0^T t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_T^\infty e^{-t/2}\,dt\\ &= \int_0^T t^{x-1}e^{-t/2}\,dt - 2e^{-T/2} < \infty\end{aligned}$$

D.v.s., $\Gamma(x)$ konvergerar för alla $x > 0$. ■

Är det nu så att om vi sätter in ett heltal i $\Gamma(x)$, så får vi ut fakulteten av talet? Ja, så när som på att vi måste förskjuta talet ett steg.

Sats 9.5. $\Gamma(n+1) = n!$ *för alla heltal* $n \geqslant 0$.

Bevis: Låt oss först visa att för alla $x > 0$ så är $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$$

Nu utför vi en partialintegrering där vi sätter $F(t) = t^x, G'(t) = e^{-t}$, vilket ger $F'(t) = xt^{x-1}, G(t) = -e^{-t}$

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \left[t^x(-e^{-t})\right]_0^\infty - \int_0^\infty xt^{x-1}\big(-e^{-t}\big)\,dt \\ &= \int_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}\,dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

När vi vet detta kan vi tillämpa något som kallas för *induktionsbevis.* Låt oss först beräkna $\Gamma(1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$$

Nu kan vi använda oss av att $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ för att beräkna $\Gamma(2)$

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1 = 1!$$

Vi kan gå vidare

$$\begin{aligned}\Gamma(3) &= 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2 = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2 = 6 = 3! \\ &\vdots\end{aligned}$$

Eftersom vi vet att för fakulteten gäller också $(n+1)! = (n+1)(n!)$ så innebär detta att $\Gamma(n+1) = n!$, för alla heltal $n \geqslant 0$. ■

Nu kan vi räkna ut vad $1/2!$ tar för värde med vår nya definition

$$1/2! = \Gamma(1+1/2) = \int_0^\infty t^{1/2}e^{-t}\,dt \approx 0.8862269255$$

Här har vi tagit datorn till hjälp för att beräkna det numeriska värdet på integralen.

10 Lösningar till udda övningsuppgifter

Gränsvärden

Övning 2.1. Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ växer hela tiden mellan 4 och 9. Minsta värdet är då i $x = 4$, där $f(4) = \sqrt{4} = 2$, och största värdet är i $x = 9$ där $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Alltså är $V_f = [2, 3]$.

Övning 2.3. Man ser enkelt att $\frac{3n+1}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Supremum över mängden av dessa tal är alltså 3 eller mindre. Antag att supremum är mindre än 3, t.ex. $3 - \varepsilon$ för något $\varepsilon > 0$. Vi ser då att om vi väljer $n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$ får vi att $\frac{3n+1}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2} > 3 - \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}-2+2} = 3 - \varepsilon$. Supremum kan alltså inte vara $3 - \varepsilon$ för något $\varepsilon > 0$. Därmed är supremum för mängden 3.

Kontinuitet

Övning 3.1. Derivatan av x^3 ges av

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2.
\end{aligned}$$

Derivatan av $1/x$ ges av

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}.$$

Övning 3.3. Funktionsbitarna för $x > 2$ och $x < 2$ är kontinuerliga i dessa områden. Av detta följer att när vi låter x gå mot 2, så går funktionsvärdet mot det värde man får, om man sätter in $x = 2$ i dessa funktioner. För $x < 2$ blir värdet $2^3 - 2 = 6$ och för $x > 2$ blir värdet $2b + c$. Vi ska alltså välja $a = 6$.

Ytterbitarnas derivator måste också passa ihop. Derivatorna är $3x^2$ och b, vilket för $x = 2$ ger $b = 3 \cdot 2^2 = 12$. Ur detta samt från $2b + c = 6$ fås nu $c = -18$.

Integralen

Övning 4.1. Definiera följande partition av interavallet $[0, 1]$

$$P_n : 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

vilket direkt ger oss $\Delta_i = \frac{1}{n}$ för alla i. Funktionens supremum i intervallen ges förstås av funktionens värde i högra intervallgränsen. På samma sätt ges funktionens infimum av funktionens värde i vänstra intervallgränsen. Alltså

$$M_1 = \frac{1}{n}, M_2 = \frac{2}{n}, \ldots, M_{n-1} = \frac{n-1}{1}, M_n = 1$$
$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{n}, \ldots, m_{n-1} = \frac{n-2}{n}, m_n = \frac{n-1}{n}$$

Vi kan skriva detta på den mer kompakta formen

$$M_k = \frac{k}{n} \qquad m_k = \frac{k-1}{n} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Nu återstår bara att beräkna $U(P_n, f)$ och $L(P_n, f)$. Vi påminner oss först om hur man beräknar följande summa

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Låt oss beräkna $U(P_n, f)$

$$\begin{aligned} U(P_n, f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Låt oss beräkna $L(P_n, f)$

$$\begin{aligned} L(P_n, f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} (k-1) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

Dessa två beräkningar ger

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{n+1}{2n} - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Alltså, givet godtyckligt $\varepsilon > 0$ kan vi, genom att välja $n > 1/\varepsilon$, erhålla

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) < \varepsilon.$$

Vi har då visat att f är integrerbar på intervallet $[0, 1]$.

Integrerbarhet

Övning 5.1. Vi får $F(x) = \frac{x^4}{4}$ vilket ger

$$\int_1^2 x^3 dx = F(2) - F(1) = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Övning 5.3. Vi får $F(x) = \sin(x)$ vilket ger

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = F(\pi/2) - F(0) = 1 - 0 = 1$$

Integrationstekniker

Övning 6.1. Om vi deriverar $\sin(x^2)$ (genom att använda kedjeregeln) får vi precis $2x\cos(x^2)$. Alltså

$$\int 2x\cos(x)dx = \sin(x^2) + C$$

Övning 6.3. Vi deriverar uttrycket (börja med att använda produktregeln på den första termen) och struntar i faktorn $1/2$ så länge

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(t\cos(\arcsin(t)) + \arcsin(t)\Big) = \cos(\arcsin(t)) + t\frac{d}{dt}\cos(\arcsin(t)) \\ + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned} \tag{6.1}$$

Med hjälp av kedjeregeln beräknar vi den kvarstående derivatan

$$\frac{d}{dt}\cos(\arcsin(t)) = -\sin\big(\arcsin(t)\big)\frac{d}{dt}\arcsin(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Sätter vi in detta i ekvation (6.1) fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(t\cos(\arcsin(t)) + \arcsin(t)\Big) &= \cos(\arcsin(t)) - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

Skriver vi detta på ett gemensamt bråkstreck får vi

$$2\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} = 2\sqrt{1-t^2}$$

Vilket stämmer överens med funktionen vi integrerade (om vi kommer ihåg att sätta tillbaka faktorn $1/2$).

Övning 6.5. Vi använder oss av variabelsubstitution med $f(x) = 1/\sqrt{x}, t = g(x) = 1 - x^2$. Eftersom $g'(x) = -2x$ skriver vi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Övning 6.7. Vi börjar att göra en partialintegration med $F(x) = x^2$ och $G'(x) = e^x$. Detta ger $F'(x) = 2x$ och $G(x) = e^x$.

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx$$

Vi kan nu göra en till partialintegrering av den kvarstående integralen

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\Big(xe^x - \int e^xdx\Big) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Rotationsintegraler

Övning 7.1. Vi beräknar rotationsintegralen av $f(x) = x^2$

$$\pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Övning 7.3. Vi beräknar rotationsintegralen av $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

$$\pi \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\cos(x)}\right)^2 dx = \pi \left[\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = \pi(1-0) = \pi$$

Generaliserade integraler

Övning 8.1. Med hjälp av partialintegrering får vi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}\, dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty x\left(-e^{-x}\right) dx \\ &= 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1\end{aligned}$$

Övning 8.3. Vi börjar med att förenkla uttrycket inuti integralen

$$\int \frac{1}{t}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2}\, dt = \int \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^3}\, dt$$

Vi litar nu på tipset och gör en variabelsubstitution med $g(x) = \sqrt{x}$ och $f(t) = \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^3}$. Detta ger att $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ och Sats 6.9 ger oss

$$\int \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^3}\, dt = \int \frac{\sqrt{1+(\sqrt{x})^4}}{(\sqrt{x})^3}\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$$

Nästa tips var att göra en partiell integration med $G'(x) = \frac{1}{x^2}$ och $F(x) = \sqrt{1+x^2}$ vilket ger oss $G(x) = -1/x$ och $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Med hjälp av partiell integration får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx &= -\frac{1}{2x}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\ &= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx\end{aligned}$$

Den sista integralen är känd och är $\operatorname{arcsinh}(x)$, vilket kan visas på samma sätt som vi gjorde för $\arcsin(x)$. Vi får

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x)$$

Eftersom vi vill ha svaret uttryckt i den ursrungliga variabeln t så ersätter vi x med $g^{-1}(t) = t^2$ överallt.

$$\int \frac{1}{t}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2}\, dt = -\frac{\sqrt{1+t^4}}{2t^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(t^2)$$