Gymnasieskolans mål och Högskolans förväntningar. En jämförande studie om matematikundervisningen.

Hans Thunberg, KTH Matematik
thunberg@math.kth.se
Lars Filipsson, KTH Matematik
lfn@math.kth.se

Sammanfattning. Med jämna mellanrum rapporteras det om att nyantagna studenter vid tekniska och naturvetenskapliga utbildningar vid universitet och högskolor har allt större svårigheter med de inledande matematikkurserna, svårigheter som i många fall leder till försenade eller avbrutna studier. Vi rapporterar här om en studie vid KTH i Stockholm som indikerar att dessa "bristande förkunskaper" har ett flertal strukturella orsaker. Vi identifierar ett *stoffgap*, ett antal stoffområden som traditionellt förutsätts som förkunskaper vid universitet och högskolor, men som idag inte kan sägas ingå i gymnasieskolans kursmål. Det kan vara stoff som inte alls behandlas på gymnasiet, eller som behandlas med andra kunskapsmål och ambitioner än dem högskolan (KTH) förväntar sig. Vidare beskriver vi en *kulturklyfta*, dvs. en diskrepans mellan gymnasiet och högskolan i synen på vad som konstituerar matematiskt kunnande. Exempelvis förväntar sig högskolan ett betydligt större mått av räknefärdighet än vad som krävs på de nationella proven i gymnasiet; kunskap om formler och standardidentiteter utgör i högskolevärlden en självklar del av ett matematiskt kunnande, på gymnasiet är en formelsamling och (oftast) en grafritande räknare ständigt närvarande hjälpmedel. Vi diskuterar också hur förändringar i behörighetskraven för civilingenjörsutbildningarna och förändringar i gymnasiets struktur har samverkat till en påtaglig sänkning av de särskilda behörighetskraven.

Innehållsföreteckning

1 Bakgrund

Vid KTH, liksom vid många andra högskolor i landet, har vi under en längre tid iakttagit tilltagande svårigheter för de nyantagna studenterna med de obligatoriska kurserna i matematik. Ifrån de återkommande förkunskapstest för nyantagna som ges vid flera av landets högskolor rapporteras sämre resultat för vart år. Som lärare upplever vi hur studentgrupperna blir allt mer inhomogena med avseende på matematikkunskaper, och hur en allt större grupp har så svaga kunskaper att de helt saknar förutsättningar för att tillgodogöra sig det första årets kurser. Trots minskat kursinnehåll upplevs kurserna som mer pressade nu än tidigare. Samtidigt finns det en grupp studenter med goda förkunskaper och ett stort matematikintresse; för dessa är problemet det omvända, de inledande kurserna erbjuder inte tillräckligt med stimulans och utmaningar.

Vi rapporterar här om ett projekt, *Gymnasieskolans mål och högskolans förväntningar – en jämförande studie om matematikundervisning,* som har syftat till att närmare beskriva och analysera de ovannämnda problemen. Projektet har genomförts vid KTH Matematik av artikelförfattarna tillsammans med Mikael Cronhjort. Arbetet har bedrivits i kontakt med PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm, där också relaterade undersökningar har genomförts. Studenter vid utbildningsprogrammet *Civilingenjör & Lärare* (KTH-LHS) har inom ramen för sin utbildning också medverkat i ett delprojekt.

Matematikundervisningen i Sverige är just nu på många sätt aktuell i den offentliga debatten. Regeringens matematikdelegation presenterade förra året sitt betänkande *Att lyfta matematiken – intresse, lärande och kompetens* (SOU 2004:97). Högskolepropositionen *Ny värld – ny högskola* (Utbildnings- och kulturdepartementet 2005), med bland annat förslag till nya behörighetsregler till högskolan, presenterades i juni 2005. Gymnasieskolan skall ges en ny struktur med start hösten 2007, i skrivande stund pågår arbetet med detta på Skolverket. Planer finns också på en reformering av grundskolan.[1]

De problem vi identifierar gällande den högskoleförberedande matematiken på gymnasiet har tidigare påtalats i flera utredningar och forskningsrapporter, utan att detta har påverkat utvecklingen i nämnvärd grad. Vi hoppas att denna rapport kan aktualisera, precisera och uppdatera denna

[1] Matematikämnet i grundskolan har fått en rik belysning de senaste åren. Artikelförfattarna är inte närmare insatta i detta område, men vi vill ändå peka ut de referenser vi känner till genom sammanfattningar. Bilden tycks inte vara entydig. Två internationella studier (TIMMS 2003 och PISA 2003) och en nationell studie (NU03) har utvärderat matematikkunskaperna hos elever i grundskolans sista år. Resultatet brukar sammanfattas som att matematikkunskaperna har försämrats under nittiotalet, medan vissa tecken tyder på att den nedåtgående trenden har bromsats upp de senaste åren. I den s k Medelsta-undersökningen (Engström och Magne 2003a, Engström och Magne 2003b), som studerar hur kunskaper och kunskapsutveckling i grundläggande matematik i grundskolan har förändrats under en tjugofemårsperiod, finner man ingen försämring över tiden, med ett väsentligt undantag relevant för kommande studier vid högskolan: kunskaperna i bråkräkning i årskurs 9 år 2002 är sämre än 1977 och 1986. Däremot visar man på oförändrat stora problem för de elever som presterar under medianen, de slås ut tidigt i den meningen att lärandet blir sämre och sämre ju högre upp i årskurserna de kommer. Madeleine Löwing (Löwing 2004) har i sin avhandling analyserat matematikundervisningen i ett antal klasser i grundskolan. En av iakttagelserna är att läraren i individualiseringens namn har abdikerat som arbetsledare, ”tyst räkning i böckerna” är den dominerande arbetsformen.

problematik inför de förändringar som är på gång. Som framgår nedan anser vi vidare att förändrade antagningskrav till högskolan utan åtföljande förändringar av kurs- och utbildningsplaner också spelar en stor roll för de ökade problemen; denna aspekt har inte framhållits i tidigare rapporter.

I Avsnitt 2, *Stoffgapet, kulturklyftan och de sänkta behörighetsvillkoren* sammanfattar vi våra resultat. En genomgång av tidigare studier som anknyter till vårt arbete följer i Avsnitt 3. Avsnitt 4 ger en kort sammanfattning av de olika delprojekt som utgör undersökningens empiriska bas. Avsnitt 5, *Betyg och kursval i gymnasiet och den särskilda behörigheten*, redovisar resultat om hur studie-bakgrunden i gymnasiet påverkar studieresultaten på det första årets matematikkurser på högskolan, och diskuterar hur de särskilda behörighetsvillkoren i matematik har förändrats och hur de förhåller sig till de faktiska förkunskapskraven. I det sista avsnittet pekar vi på några möjliga reformer och också på frågor som vore värda ytterligare belysning.

Vi vill betona att de problem vi påtalar är problem orsakade av politiska beslut och beslut inom skol-administration på olika nivåer. Under arbetets gång har vi mött många lärare på såväl högskolor som gymnasier som i sin dagliga gärning arbetar hårt och ambitiöst med att utveckla sina elevers matematiska förmågor, men som upplever svårigheter av den art vi påtalar. Vi vill passa på att framföra ett stort tack till alla lärare, elever och studenter som med sina erfarenheter har bidragit till denna undersökning.

2 Stoffgapet, kulturklyftan och de sänkta behörighetskraven

2.1 Resultat i korthet

Longitudinella undersökningar om nyantagna studenters kunskaper i matematik har genomförts vid ett flertal svenska universitet och högskolor. I avsnittet *Tidigare studier* sammanfattar vi en del av dessa resultat och de slutsatser som har dragits. Den föreliggande undersökningen kan delvis ses som en komplettering och uppdatering av dessa tidigare studier, men dess huvudsakliga ansats, att jämföra gymnasiets mål med högskolans förväntningar, är vad vi kan förstå ny. Vi finner att problemet till stor del är strukturellt.

- Mycket av det som av högskolan uppfattas som viktiga förkunskaper ingår inte i alls i gymnasiets kurser, annat behandlas med andra kunskapskrav än vad högskolan önskar och förväntar sig. På högskolan ges detta stoff i bästa fall en summarisk ”repetition”. Vi identifierar klart definierade områden som på detta sätt faller mellan stolarna.

- Det finns en påtaglig skillnad i kunskapssyn mellan gymnasiet och högskolan, bl a i synen på vikten av räknefärdighet och kunskap om identiteter för elementära funktioner (utan hjälpmedel). Vi syftar här inte på enskilda lärares inställning, utan på skillnader som kommer till uttryck i t ex högskolans tester och på de nationella proven i gymnasiet.

- De uttalade förkunskapskraven vid högskolan, i form av behörighetskrav, är lägre än de krav som undervisningen faktiskt ställer. Den särskilda behörigheten har sänkts flera gånger det senaste decenniet, antingen genom medvetna beslut eller som en konsekvens av andra beslut och skeenden, utan nämnvärd anpassning av högskolans inledande kurser. Dessutom har en betydande betygsinflation på gymnasiet urholkat behörighetskraven ytterligare.

Denna strukturella diskrepans mellan vad som faktiskt krävs för att tillgodogöra sig högskolans inledande matematikkurser och de ambitioner som uttrycks i behörighetskrav och gymnasieskolans agenda är så stort att talet om ”studenters försämrade förkunskaper” i det närmaste blir en tautologi.

I ett antal delprojekt (se *Genomförda delprojekt*) har vi försökt pejla vilket matematiskt kunnande det är som högskolan (KTH), implicit och explicit, förväntar sig hos de nyantagna studenterna, och hur dessa förväntningar förhåller sig till det faktiska kunnande som studenterna har med sig ifrån gymnasiet.

I förkunskapstest och i utformningen av introducerande och studieförberedande kurser uttrycks vissa förkunskapskrav och förväntningar vid KTH tydligt. Det handlar om räknefärdighet och begreppskännedom inom aritmetik, elementär algebra, elementära funktioner och ekvationslösning. Säkerligen finns också förväntningar på andra kompetenser, t ex problemlösningsförmåga, och på kunskaper inom andra stoffområden som t ex geometri, differential- och integralkalkyl och sannolikhetslära, men detta är inget som betonas i de introducerande kurserna. Vår utgångspunkt är att det material som högskolan väljer att behandla i sina frivilliga, introducerande kurser är just det som bedöms som mest kritiskt inför de kommande studierna. De kurser vi har tagit som referens är också utformade på ett sådant sätt att det är klart att de tänks utgöra repetition snarare än komplettering.

Gymnasieskolans mål är svårare att komma åt; kursplanerna är för allmänt formulerade för att utgöra relevant jämförelsematerial i denna undersökning; vi baserar oss istället främst på studenters, KTH-lärares och gymnasielärares bedömning av hur det inledande studiematerialet i matematik vid KTH förhåller sig till de nyantagnas kunskaper; det är alltså snarare de reella än de formella kunskapskraven för gymnasiet som utgör jämförelseobjekt i dessa delprojekt. Gymnasiets nationella prov, som bl a har till uppgift att förtydliga kursplanerna, ger oss en möjlighet att göra jämförelser även med de formella målen.

Eftersom den särskilda behörigheten i matematik för studier vid KTHs civilingenjörsprogram är betyg Godkänt (G) i gymnasiets Kurs D är detta den förkunskapsnivå vi utgår ifrån, om inget annat sägs. När vi nedan beskriver färdigheter (t ex ”förmåga att lösa andragradsekvationer”) menar vi färdighet utan hjälpmedel såsom räknare eller formelsamling; det är den typ av färdighet som högskolan efterfrågar.

2.2 Stoffgapet och kulturklyftan

Vi sammanfattar här den diskrepans mellan gymnasiets mål och högskolans förväntningar i matematik som vi har observerat.

1 Det finns begrepp och färdigheter som högskolan förutsätter som förkunskaper men som överhuvudtaget inte ingår i gymnasiets kurser A – D:
- i avståndsformeln i planet och cirkelns ekvation;
- ii kvadratkomplettering (detta förekommer visserligen vid härledning av lösningsformeln för andragradsekvationer, men betonas inte som en färdighet i sig);
- iii absolutbeloppsfunktionen;
- iv förmåga att lösa enklare icke-linjära olikheter.

2 Inom ett flertal stoffområden förväntar sig högskolan ett större begreppsmässigt djup och mer långtgående färdigheter än vad gymnasiets kurser syftar till:
- i algebraisk förmåga såsom t ex faktorisering av polynom, förenkling av rationella uttryck, räkning med rötter och rationella potenser;
- ii lösning av ekvationer och enklare linjära olikheter;
- iii logaritmer, såväl vad gäller grundläggande egenskaper som förmåga att omforma uttryck med hjälp av logaritmlagarna; logaritmer i annan bas än 10, speciellt naturliga logaritmer, och basbyte i logaritmer;
- iv de trigonometriska funktionernas definition på enhetscirkeln och förmåga att förenkla trigonometriska uttryck och lösa ekvationer med hjälp av de vanligaste trigonometriska identiteterna;
- v funktionsbegreppet, t ex begreppen *sammansättning* respektive *inversfunktion*;

Vad som kan sägas ingå i gymnasiets kurser beror i viss mening på vilken betygsnivå man har i åtanke. I ovanstående klassificering har vi i under punkt 1 placerat sådant som enlig vår bedömning inte ingår generellt på någon betygsnivå. Punkt 2 syftar på sådant som en merpart av de nyantagna studenterna vid KTH, varav de flesta har höga gymnasiebetyg i matematik, känner till ifrån gymnasiet men ändå skulle behöva studera från grunden i högskolans första kurser. Se vidare sammanfattningen av våra delprojekt i kapitel 4, främst 4.2 och 4.4.

3 Vi kan också se en skillnad i syn på vad matematiskt kunnande innebär:
   i Den beräkningsmässiga komplexiteten på inledande uppgifter på högskolan är ofta betydligt högre än på motsvarande uppgiftstyper i gymnasieskolan. Det observeras av högskolans lärare som en ”svårighet att lösa uppgifter som kräver flera steg” och ”matematisk oföretagsamhet”.
   ii Som nämnts förväntar man sig vid högskolan färdigheter som är oberoende av hjälpmedel som formelsamlingar, tabeller och räknare. Med andra ord: att kunna ett område matematik innebär i högskolans kultur bl a att kunna utföra nödvändiga beräkningar för hand och att kunna en uppsättning standardformler, dessa färdigheter ses som en integrerad del av det matematiska kunnandet som korsbefruktar andra komponenter som begreppsförståelse och problemlösningsförmåga. Detta står i stark kontrast med den kunskapssyn som råder i gymnasieskolan: formelsamlingar är ett självklart hjälpmedel och grafritande räknare används i stor omfattning som hjälpmedel vid numeriska kalkyler, ekvationslösning och grafritande. Beräkningar och formler ses här snarare som hinder som står i vägen för begreppsförståelse och modellering, hinder som kan undanröjas med nämnda hjälpmedel.
   iii I analyser av tentamenslösningar observerar vi hur studenter mitt i en lösning, implicit eller explicit, postulerar en falsk identitet. Ifrån gymnasiet är studenten van att vid behov kunna söka efter lämpliga former i sin formelsamling, nu skall man tydligen söka i sitt eget minne. Högskolans syn på saken är en annan: formler ingår i en konsistent helhet, de kan härledas ur varandra och de kan testas, falsifieras eller bevisas. På så vis utgör t ex de vanligaste trigonometriska formlerna enligt högskolekulturen en självklar del av det som konstituerar ”att kunna elementär trigonometri”.
   iv Den skilda kunskapssynen leder ibland till direkta missförstånd mellan gymnasiet och högskolan. Ett exempel: logaritmer behandlas, främst i kurs C, på gymnasiet. Logaritmen används här främst för att lösa ekvationer (ofta hämtade från problem rörande exponentiell tillväxt) med den obekanta i exponenten, och beräkningarna görs oftast med hjälp av räknare. Så högskoleläraren som anser att ”logaritmer ingår i gymnasiet” har på sätt och vis rätt, men har förmodligen också en felaktig föreställning om att gymnasiematematiken har haft vidare ambitioner, t ex att ge studenterna förmåga att manipulera formler m h a logaritmlagarna (utan tillgång till formelsamling) och kunskap om logaritmfunktionens egenskaper.

I avsnitt 4.5 diskuterar vi hur gymnasiets mål som de uttrycks i de nationella proven (de offentliggjorda årgångarna 2002 och 2005) förhåller sig till den bild som framträder i våra övriga undersökningar. De tekniska högskolornas förkunskapstest visar på en klar successiv försämring av nyantagna studenters förkunskaper inom de områden som de mäter, där räknefärdighet (aritmetisk och algebraisk) och kunskap om elementära funktioner spelar en stor roll. Om vi tänker på de nationella proven som styrande för gymnasiets undervisningsagenda är det inte förvånande; på dessa betonas begreppsbildning, begreppsförståelse och modellerande/verklighetsnära uppgifter, ofta i en form som inte kräver någon beräkningsförmåga alls, och den räknemässiga komplexiteten är mycket låg (speciellt på de uppgifter där räknare ej är tillåten). Till proven finns också en formelsamling med nödvändiga standardformler inom algebra och funktionslära; inga krav finns på att kunna eller kunna härleda relevanta formler.

2.2.1 Kan man skjuta upp lärandet av grundläggande färdigheter?

En mycket viktig fråga är hur lärandet av matematik påverkas av att färdighetsträning inom aritmetik och algebra skjuts allt högre upp i åldrarna. Det är välkänt att vissa typer av färdigheter (språk t ex) lärs ojämförligt bäst i yngre år. Det är inte otroligt att även vissa matematiska färdigheter följer samma mönster. Vi efterlyser studier på detta område.

2.3 Studiebakgrund och behörighetskrav

De flesta studenter som antas till KTHs civilingenjörsutbildningar har läst mer matematik än vad den särskilda behörigheten kräver. Den minoritet som precis uppfyller kraven betyg G på Kurs D tycks få mycket stora problem med det första årets matematikstudier. Detta visar på en diskrepans mellan de formella behörighetskraven och de reella. Vi diskuterar detta vidare i avsnitt 5, *Om betyg och kursval i gymnasiet och den särskilda behörigheten*, där vi också beskriver de förändringar (sänkningar) av de särskilda behörighetsvillkoren som har gjorts. Vi tänker då på att

1. när gymnasieskolan gick från det relativa betygssystemet till dagens målrelaterade betyg ändrades den särskilda behörigheten i matematik för civilingenjörsprogram från betyg 3 till betyg G, där G ofta bedöms innefatta även betyg 2 i det relativa systemet;
2. KTH såväl som en rad andra högskolor har sänkt behörighetskravet i matematik från Kurs E till Kurs D, en anpassning till vad som i dag utgör obligatoriska matematikkurser på det naturvetenskapliga programmet;
3. en betydande betygsinflation på gymnasiet har förändrat innebörden av behörighetsvillkoren.

Timplanerna i gymnasiet förändrades när Lgy 70 (Läroplan för gymnasiet 1970) ersattes av Lpf 94 (Läroplan för de frivilliga skolformerna 1994), som i sin tur modifierades år 2000. Förändringarna kan sammanfattas på följande sätt: För tio år var det särskilda behörighetskravet i matematik betyg 3 från en kurs om ca 360 klocktimmar, idag är den motsvarande betyg 2 från kurser om totalt ca 300 klocktimmar schemalagd undervisning. [2]

[2] Enligt timplanerna i Lgy 70, 3:e upplagan (1983), hade det naturvetenskapliga programmet 6, 5.5 och 4 veckotimmar matematik i årskurserna 1, 2 respektive 3. Med ett läsår om 35 veckor och lektioner om 40 minuter ger detta 362 klocktimmar. (Till detta kom 1 veckotimme självstudietid i åk 3, räknar vi med den hamnar vi på 385 klocktimmar). Kurs A – D omfattar idag 350 poäng. NV-programmet omfattar totalt 2500 poäng, och en garanterad undervisningstid om 2180 timmar, vilket för matematikens del svarar mot drygt 300 klocktimmar. En motsvarande kalkyl ger att den totala undervisningstiden på NV-linjen enligt Lgy 70 var drygt 2200 klocktimmar, att jämföra med dagens 2180 timmar; den totala schemalagda undervisningstiden på NV-programmet är alltså väsentligen densamma, men den matematik som krävs för att för att börja på t ex KTH har minskat med 17%.
Kurs A – E omfattar 400 poäng, och detta svarar mot knappt 350 klocktimmars undervisning, dvs väsentligen samma omfattning som enligt Lgy 70.

3 Tidigare studier

3.1 Högskolornas förkunskapsprov

3.1.1 Förändringar över tid

Frågan om hur de nyantagna studenternas förkunskaper i matematik har förändrats över tiden besvaras delvis av de förkunskapstest som har genomförts vid flera av landets högskolor under en lång rad av år; tack vare över åren återkommande uppgifter kan longitudinella jämförelser göras. En sammanfattning av utvecklingen fram till slutet av nittiotalet finns i två rapporter: Bengt Johanssons *Förkunskapsproblem i matematik* (Skolverket 1998) och *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket 1999a). Den samlade bedömningen är att det under denna period har skett en signifikant försämring av de nyantagnas förkunskaper, även om bilden inte är helt entydig. Man refererar till rapporterar från Linköpings Universitet och Luleås Tekniska Högskola om en successiv försämring sedan mitten av sjuttiotalet, men också testresultat från Chalmers som håller sig på konstant nivå fram till 1993, då de dramatiskt försämras.

Utvecklingen från mitten av nittiotalet fram tills idag är tyvärr mer entydigt negativ.
Rolf Pettersson vid Chalmers har genomfört ett förkunskapstest för samtliga nyantagna teknologer varje år sedan 1973 (Pettersson 2003). Som nämnts är resultaten här konstanta fram till 1993, för att falla markant 1994. De förblir sedan på denna lägre nivå fram till 2000, då en successiv försämring vidtar. Vid Umeå Universitet har en liknande studie genomförts under åren 1998 – 2001 (Bylund och Boo 2003), kraftigt försämrade resultat rapporteras under dessa fyra år. Vid KTH har Lars Brandell genomfört analyser av ett förkunskapstest (Brandell 2004). Testet har givits, i identisk form, till samtliga nyantagna teknologer sedan 1997. Detta prov innehåller såväl uppgifter som testar räknefärdighet som uppgifter som kräver kreativitet och problemlösningsförmåga. Resultatet har, med enstaka undantag, försämrats år från år på samtliga uppgiftstyper, på samtliga civilingenjörsprogram och inom samtliga gymnasiebetygskategorier. Mellan 2000 och 2001 sker den största enskilda förändringen[3]. Undersökningarna vid KTH och Umeå Universitet rapporterar bägge om en betygsinflation på ett helt steg på ett halvt decennium: den genomsnittlige VG-studenten presterar idag som den genomsnittlige G-studenten gjorde för ca fem år sedan.

Man skall vara medveten om att dessa test mäter förkunskaperna inom ett fixt och avgränsat antal färdigheter och stoffområden (som i och för sig, får man förmoda, bedöms som de mest väsentliga av högskolornas matematikinstitutioner.) De är därmed okänsliga för förändringar av förkunskaperna inom andra områden och för eventuella nytillkomna kompetenser hos de nyantagna studenterna.

3.1.2 Demografiska förklaringar?

I bägge de ovannämnda rapporterna *Förkunskapsproblem i matematik* (Skolverket 1998) och *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket 1999) nämns demografiska skäl som en tänkbar delförklaring till de försämrade resultaten på förkunskapsproven fram till mitten av nittiotalet.

[3] Det genomsnittliga resultatet på KTH-testet var 2004 på samma nivå som 2003. Ett fåtal program hade bättre resultat 2004, förmodligen bl a på grund av minskat antal platser och därav följande högre antagningspoäng, men för de flesta programmen fortsatte den nedåtgående trenden 2004. Preliminära siffror från 2005 visar på samma genomsnittliga resultat som 2004.

Då de senare undersökningarna vid KTH (Brandell 2004) och Umeå Universitet (Bylund och Boo 2003) påvisar en fallande trend även inom alla betygskategorier, förfaller de demografiska skälen inte att spela någon avgörande roll.

3.1.3 Förkunskapstesterna och deras relevans

En annan delförklaring som ibland har diskuterats är att de förkunskapstest som ges vid högskolorna inte skulle vara relevanta för dagens gymnasieskola, dvs att testen ställer frågor på sådant som inte längre ingår i gymnasiematematiken och dessutom underlåter att ställa frågor på sådant som numer ingår i gymnasiets kurser. Det senare påståendet är naturligtvis korrekt, men också irrelevant; syftet med dessa tester är att mäta förkunskaperna inom vissa kritiska områden, inte att utvärdera gymnasieundervisningen som helhet. Huruvida de uppgifter som ges på testerna har täckning i gymnasiematematiken är svårare att ge ett entydigt svar på.

I *Förkunskapsproblem i matematik* (Skolverket 1998) redovisas en undersökning där gymnasielärare har fått bedöma relevansen av uppgifterna på Chalmers förkunskapstest 1997. Slutsatsen är att uppgifterna, även om de har använts sedan sjuttiotalet, bedöms ha en relativt hög grad av relevans. Lärarna ombads också att bedöma hur uppgifterna förhöll sig till gymnasieundervisningen som den såg ut 1993, 1988 och 1978. Här är resultatet att samtliga uppgifter, med ett undantag (en andragradsekvation[4]), hade en mer central ställning i gymnasiematematiken ju längre tillbaks i tiden man gick. Uppgifterna var typiska räknefärdighetsuppgifter inom aritmetik, algebra, trigonometri, analytisk geometri (räta linjens ekvation), logaritmräkning och differentialkalkyl samt ett problem rörande beräkning av medelhastighet. Inom samtliga dessa områden har alltså gymnasiets ambitioner, enligt de tillfrågade lärarnas bedömningar, sänkts markant under perioden 1978 – 1997, men inte till den grad att de bedöms som irrelevant att testa förkunskaperna på det sätt som gjordes (och görs).

Det har också framhållits att den observerade försämringen sker på bred front, och inte är isolerad till (förmodat utdaterade) uppgifter av viss typ. Förkunskapstesten vid KTH och Umeå Universitet, som är utformade utifrån den rådande kursplanen i gymnasieskolan och med varierade typer av uppgifter, visar som sagt på ett försämrat kunskapssnitt hos de nyantagna teknologerna. Vid KTH gavs 2004 också ett andra förkunskapstest av mer ”traditionell” räknefärdighetstyp. Resultaten från dessa prov uppvisar en hög grad av korrelation.

Till sist: resultaten från förkunskapstesterna saknar inte intresse *även om* uppgifterna delvis skulle beröra sådant som inte längre ingår i gymnasiematematiken. Tvärtom visar detta i sådana fall på färdigheter som av högskolan bedöms som väsentliga förkunskaper men som inte längre behandlas i tillräcklig omfattning på gymnasiets studieförberedande program.

[4] Andragradsekvationen tycks ha en närmast mytologisk roll. Den tilldelas högsta relevans 5.0 relativt gymnasiet 1978, 1988 och 1993, och näst intill högsta relevans, 4.96, relativt 1997. Ingen av de andra uppgifterna är i närheten av dessa siffror.

3.2 Om gymnasiets högskoleförberedande roll

3.2.1 Nationella prov och gymnasielitteratur kontra högskolans förväntningar

I två studentuppsatser handledda av Rolf Petterson, Chalmers och Karlstads Universitet, görs jämförelser mellan typiska uppgifter från diagnostiska prov och slutprov vid den förberedande kurs som ges för nyantagna teknologer vid Chalmers (se ovan), uppgifter i läromedel för gymnasiet och uppgifter på de nationella proven i matematik. Peter Bratt gör en jämförelse av algebrauppgifter (Bratt 2004), Gabriella Jingulescu (Jingulescu 2004) studerar geometriuppgifter. De bägge rapporterna finner mycket låg grad av överensstämmelse mellan uppgifterna från Chalmers och kunskapskraven på nationella proven inom dessa stoffområden. Vår jämförelse mellan två årgångar av nationella prov och KTHs introduktionsmaterial (se avsnitt 4.5) bekräftar denna bild.

3.2.2 Förslag på förändringar i gymnasiets kursplaner

Problem med bristande kompatibilitet mellan gymnasiets mål och högskolans förväntningar har påtalats tidigare, och förslag har också lämnats på hur gymnasiets kurser skulle utformas för att bättre förbereda för studier vid t ex tekniska högskolor, se t ex *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket 1999a). Vi vill speciellt peka på den rapport *Matematik –Från gymnasieskolans NV-program till högskolan* (Björk och Brolin 1998) som skrevs inom ramen för det s k ADM-projektet (Analys av Datorns konsekvenser för Matematikundervisningen). En grupp bestående av 17 gymnasielärare och 11 högskolelärare i matematik från hela landet arbetade tillsammans med två representanter från ADM-projektet fram en lista med explicita exempel på färdigheter som en elev borde tillägna sig under gymnasiets Kurs A – D i matematik för att vara lämpligt förberedd för fortsatta studier i matematiska ämnen vid högskolan. Som en bakgrund till arbetet hade diskussioner förts med ett hundratal lärare på 24 skolor. Arbetet aktualiserades av den då nya läroplanen för gymnasiet Lpf 94 och den ökade användningen av grafritande räknare. De behov som pekas ut i denna rapport sammanfaller till stor del med det stoffgap vi har identifierat.

3.3 Förkunskapernas betydelse för de fortsatta studierna

Förkunskapernas relevans och betydelse för de fortsatta studierna har också diskuterats tidigare. I *Räcker kunskaperna i Matematik* (Högskoleverket 1999a) refereras till en undersökning av Gerd Brandell vid civilingenjörsutbildningen i Luleå 1993, som påvisar ett starkt samband mellan förkunskaper mätta i termer av matematikbetyg från gymnasiet och studieframgångar vid högskolans matematikkurser under de två första åren. Ifrån Umeå Universitet (Bylund och Boo 2003) rapporteras om liknande resultat.

Vi rapporterar nedan i avsnittet *Betydelse av kursval och betyg i gymnasiet* om resultat från KTHs Öppen Ingång, där det första årets studieresultat visar en kraftig positiv korrelation med gymnasiebetyget. Slutsatserna stämmer väl överens med undersökningen ifrån Umeå: studenter med betyg G från kurs D i gymnasiet har som grupp mycket svaga resultat på det första årets matematikkurser.

4 Genomförda delprojekt

I detta avsnitt beskriver vi i korthet de delprojekt som bildar underlag för denna rapport. Utförligare beskrivningar finns i separata rapporter.

4.1 En Inventering

I *Förväntade och önskade förkunskaper i Matematik vid KTHs civilingenjörsutbildningar* (Thunberg och Filipsson 2005a) har vi inventerat de förväntade och önskade förkunskaperna i matematik vid KTHs civlingenjörsutbildningar, så som de tar sig i uttryck i två frivilliga introduktions- och repetitionskurser inför läsåret 2004-05. *KTHs sommarmatematik* är ett nätbaserat självstudiematerial som alla nyantagna studenter rekommenderades att ta del av under sommaren innan de började vid KTH. Kursmaterialet återfinns på hemsidan för KTH, för närvarande på http://www.math.kth.se/SMK4/. *Introduktionskurs i matematik, 1p,* är en icke-obligatorisk matematikkurs som ges under mottagningsveckorna för de nyantagna studenterna. Läsanvisningar till denna kurs, som den såg ut 2004, finns också på KTH Matematiks hemsida, för närvarande under adressen http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1120/200405/ .
(Bägge dessa kurser har reviderats inför läsåret 2005-06.)

Såväl *KTHs sommarmatematik* som *Introduktionskurs i matematik* är utformade så att de måste uppfattas som utpräglade repetitionskurser, dvs materialet behandlas på ett sätt som förutsätter en tidigare mer grundläggande behandling. Per definition är det också material som KTH Matematik anser vara relevanta och viktiga förkunskaper för fortsatta studier vid KTH. Kurserna kan alltså sägas utgöra ett uttryck för önskade och förväntade förkunskaper.
(Därmed inte sagt att de uttrycker *alla* förväntningar och förkunskapskrav. Även om t ex differential- och integralkalkylen inte tas upp i introduktionskursen, och fast detta område behandlas ifrån grunden i de första ordinarie kurserna, förutsätter upplägget och framställningen då att studenten har studerat detta område tidigare. Elementära kunskaper om geometri är ett exempel på uppenbart nödvändiga förkunskaper som inte förekommer i KTHs introducerande kurser och ej heller repeteras speciellt vid något annat tillfälle.)

Rapporten har formen av en exemplifierad katalog över begrepp, kunskaper och färdigheter, och denna katalog har tjänat som referens i det fortsatta arbetet, bl a vid utformningen av den gymnasielärarenkät som beskrivs nedan. De identifierade stoffet återfinns inom områdena aritmetik och elementär algebra, formelhantering, polynom och polynomekvationer, rationella funktioner, ekvationslösning och olikheter, potenser, logaritmer och exponentialfunktioner, trigonometri samt funktionslära och analytisk geometri.

4.2 Erfarenheter från KTHs Introduktionskurs

Nyantagna studenter vid KTHs civilingejörsutbildningar erbjuds under mottagningsveckorna att följa *Introduktionskurs i Matematik*, 5B1120. Kursen är inte obligatorisk, men de allra flesta studenter väljer att följa kursen. Kursen utgör en snabb genomgång av en lång rad färdigheter i matematik, och dess utformning och roll antyder att det behandlade stoffet är sådant som vi på KTH Matematik anser som viktiga färdigheter och förkunskaper för de kommande obligatoriska matematikkurserna, och också att detta stoff till största delen skall vara välbekant för de nya studenterna.

Under kursomgången i augusti 2004 riktade vi en enkät till undervisande lärare och till en grupp studenter där de ombads jämföra stoffet i kursen med förkunskaperna från gymnasiet. Resultatet finns rapporterat i *Lärares och studenters syn på KTHs introduktionskurs i matematik* (Thunberg och Filipsson 2005b). Vi ger nu en kort sammanfattning.

Samtliga lektionslärare, totalt 46 stycken, ombads i enkäten att ge exempel på färdigheter och stoff i introduktionskursen som för merparten av studenterna i deras undervisningsgrupp kunde inplaceras i någon av följande fyra kategorier:

Kategori	Stoff i kursen 5B1120 som merparten av studenterna …
A	behärskar och förstår så bra ifrån gymnasiet att repetitionen i 5B1120 är överflödig.
B	behärskar och förstår så pass bra från gymnasiet att det är lagom med en repetition av ungefär den omfattning som ges i 5B1120.
C	har studerat på gymnasiet, men som skulle kräva en betydligt mer omfattande behandling än vad som ges tillfälle till under 5B1120
D	inte känner igen från gymnasiet.

Enkäten besvarades av 29 av de 46 lärarna.

Samtliga studenter på KTHs Öppen Ingång (3 lektionsgrupper, dvs ca 100 studenter) och på Mikroelektronik (1 lektionsgrupp, ca 30 studenter) som följde kursen 5B1120 gavs tillfälle att besvara en liknande enkät, där de skulle ge exempel på stoff och färdigheter som för dem själva tillhörde någon av de fyra kategorierna **A - D**. 36 studenter på Öppen Ingång och 5 studenter på Mikroelektronik besvarade enkäten.

På den inledande kursen användes boken *Mot bättre vetande i matematik* av A. Dunkels, B. Klefsjö, I. Nilsson och R. Näslund från 2002 som kurslitteratur. Kursens pensum bestod av merparten av bokens fem första kapitel. Lärarnas och studenternas bedömningar av stoff och moment är alltså bedömningar av dessa stoffavsnitt som de framställs i denna lärobok.

Förutom att tolka enkätsvaren jämförde vi också med utfallet på de två diagnostiska prov som gavs vid kursens början, samt med utfallet på det avslutande provet. Lärarnas och studenternas bedömningar stämmer väl överens, och är huvudsakligen konsistenta med resultaten på proven. Resultatet kan sammanfattas som följer.

Kategori **A**: De mest elementära räkningarna med reella tal och polynom. Räta linjens ekvation på formen $y = kx + m$. Vinkelmåtten grader och radianer.

Kategori **B**: Elementära numeriska räkningar (bråk, heltalspotenser, kvadratrötter) och algebraiska räkningar (polynom, rationella uttryck). Linjära ekvationer och andragradsekvationer. Enklare rotekvationer. Elementära räkningar med rötter och potenser. Sinus/cosinus i rätvinkliga trianglar. ”Trigonometriska ettan”. Ekvationen för origo-centrerade cirklar.

Kategori **C**: Faktorisering av polynom. Förenkling av mer komplexa rationella uttryck. Sammansättning av funktioner. Förenklingar och beräkningar som kräver flera steg och företagsamhet. Olikheter. Absolutbelopp. Mer komplexa räkningar med rötter och potenser. Enklare logaritmräkningar. Enhetscirkeln och de trigonometriska funktionerna. Trigonometriska formler. Trigonometriska ekvationer. (Härledning av) cirkelns ekvation i allmän position.

Kategori **D**: Kvadratkomplettering. Summasymbolen. Faktorsatsen, polynomdivision och lösning av polynomekvationer av $\text{grad} \geq 3$. Mer komplexa uppgifter med logartimer. Logaritmen som funktion. Samband mellan potens- och logaritmlagar. Basbyte i logaritmer.
Ekvationerna för kägelsnitten. Att ha memorerat, kunna härleda och förstå samband mellan de vanligaste formlerna för trigonometriska funktioner, samt potens-, logaritm- och exponentialfunktioner; att förstå innebörden av att en formel är sann, att kunna falsifiera formler.

Kommentarer

1. Kategori **B** är det stoff som lämpar sig för en kortare repetition. Som framgår är det en stor mängd stoff (Kategori **C** och **D**) som behöver ges en grundligare behandling inom ramen för de ordinarie kurserna.

2. Kvadratkomplettering är exempel på ett moment som ges en spridd bedömning av studenterna, medianen ligger i **C,** men typvärdet (9 av 20 svarande) ligger i **D**. Som nämnts förekommer kvadratkomplettering i gymnasielitteraturen i härledningen av lösningsformeln för andragradsekvationer, men övas inte som en färdighet i sig. Polynomdivision, som av studenterna placeras antingen i **B** eller i **D**, är ett annat; detta förklaras delvis av att detta moment hör till gymnasiets Kurs E som ej är förkunskapskrav, och därmed har lästs av många men inte alla.

3. Efter genomförd studie har vi blivit medvetna om att absolutbeloppsfunktionen inte kan sägas ingå i gymnasiets kurser överhuvudtaget, och därför rätteligen borde ha hamnat i kategori **D**. Detsamma gäller ekvationen för en cirkel i allmän position. Placeringen i **C** kan kanske komma sig av att man vid något tillfälle har sett absolutbeloppstecknet, opererande på numeriska storheter, eller enhetscirkelns ekvation. De som har läst kurs E har också sett den komplexa beloppsfunktionen.

4. Andel svar från studentgruppen var lågt, ca 30%, och studenter med betyg VG eller MVG från kurs D på gymnasiet var överrepresenterade bland de svarande. Förmodligen betyder det att en del stoff bör flyttas upp en kategori: resultat från det diagnostiska prov som inledde introduktionskursen antyder t ex att räta linjens ekvation snarare hör hemma i kategori **B** än i **A**.

5. Studenter med betyg MVG upplever i högre grad än andra kursen som en repetition av tidigare inlärda färdigheter, detta gäller även mer elementära moment. En tänkbar förklaring är att grundskolans och gymnasiets matematikundervisning är sådana att endast de duktigaste studenterna hinner uppöva säkerhet och befästa sina kunskaper och färdigheter. För dem

som inte hör till de allra duktigaste eller ambitiösaste behandlas mycket stoff på ett sådant sätt att det hamnar i kategori **C**, dvs. man har stött på och övat en del på stoffet i fråga, men aldrig uppnått någon förståelse eller bestående färdighet. Liknande slutsatser finner man i Lars Brandells rapport (Brandell 2004).

6. Många av lärarna pekar också på svårigheter som inte är knutna till något speciellt stoff, som t ex svag räknefärdighet i allmänhet, svårigheter med tecken- och prioritetsregler, ovana att hantera uppgifter som kräver beräkningar i flera steg och oförmåga att skilja på uttryck och ekvationer.

7. Studenterna påpekar ovanan vid att jobba utan räknare och formelsamling som en stor svårighet. En student skriver: ”Jag kände igen det mesta, det som var svårt var att räkna utan hjälpmedel och att lära sig att räkna på ett nytt sätt. Dessutom var det för lite tid för att lära sig använda härledningarna i räkningen, det har vi aldrig behövt göra förut.”

8. Synen på formler omnämns av både studenter och lärare som en springande punkt; det är en stor omställning att inte ha tillgång till formelsamling och att vara tvungen att memorera eller själv kunna härleda nödvändiga formler; det kräver en fördjupad syn på hur definitioner, formler och identiteter hänger ihop och vad det innebär att en formel är sann respektive falsk.

4.3 Analyser av tentamenslösningar

Två delprojekt med studier av tentamenslösningar har genomförts.

4.3.1 Tentamen på Introduktionskursen

Michael Cronhjort har analyserat lösningar från den tentamensskrivning som avslutade den ovannämnda introduktionskursen vid KTH hösten 2004 (Cronhjort 2005). Studien är såväl kvantitativ som kvalitativ, och omfattar 52 tentamina skrivna av studenter vid KTHs Öppen Ingång.

Tentamen innehöll 9 uppgifter:

1. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt $(x+3)^2 - x^2$.
2. Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 6x - 7$.
3. Lös ekvationen $x^2 + 4x - 7 = 0$.
4. Förenkla uttrycket $\dfrac{\sqrt{a^3} \cdot a^{5/2}}{a^2}$.
5. Lös ekvationen $5 = 3^x$.
6. Lös ut t ur formeln $T = \dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{p}}$.
7. Vad är $\sin v$ då $\cos v = -1/3$, $0 < v < p$?
8. Lös ekvationen $\cos 2x = \cos x$.
9. Rita kurvan $(x+3)^2 + y^2 = 9$.

Uppgifterna och resultatet skall ses i ljuset av att de skrivande vid tentamenstillfället just har avslutat KTHs introduktionskurs, där de under två veckor med sammanlagt 24 timmars undervisning har övat på precis dessa typer av uppgifter.

Materialet omfattar 52 tentamina à 9 uppgifter, vilket ger totalt 468 möjliga lösningar. Av dessa är 143 uppgifter, 31%, felaktigt lösta. Bland dessa hittades 94 fel som kunde beskrivas.

Den första uppgiften löser nästan alla, 96%. Uppgifterna 2 – 6 löstes av cirka 70 – 80 procent av studenterna. Trigonometri-uppgifterna 7 och 8 gick sämst, och löstes av mindre än hälften av studenterna. Uppgift 9, som handlade om att rita en cirkel utifrån en given ekvation, innebar också problem för många studenter. Den löstes av cirka två tredjedelar av studenterna.

En rimlig tolkning är att de sex första uppgifterna är sådant som de flesta av studenterna har relativt god färdighet i att lösa ifrån sina gymnasiestudier, efter en kortare repetition fungerar det ganska bra. Kvadratkomplettering är kanske nytt för många, men detta uppfattas inte som speciellt svårt att lära sig. Trigonometriuppgifterna däremot kräver en förståelse som tydligen inte har uppnåtts på gymnasiet, och den korta övningen inom ramen för introduktionskursen är helt otillräcklig[5]. Uppgift 9 är av en typ som inte ingår i gymnasiekursen.

Cronhjort gör också en kvalitativ studie av de fel som förekommer, och identifierar tre stoffområden (trigonometri, potenser och logaritmer) och tre kompetenser (formelförståelse och formelkunskap, räknefärdighet samt hantering av uttryck och ekvationer) som problematiska.

Trigonometri
Ett vanligt fel är att studenten missar att ekvationer av typen $\cos x = k$ har två lösningar per varv. Ett annat framträdande fel som gäller trigonometri är att studenten inte skiljer på vinklar och cosinus av vinklar. Studenten kan t ex skriva $\cos x = 60^\circ = 1/2$.

Potenser
16 av de beskrivna felen handlar om potenser och potenslagar. Ett vanligt fel (9 förekomster) är att studenterna inte vet hur man skall skriva $\sqrt{a}$ som en potens.

Logaritmer
12 av de beskrivna felen handlar om logaritmer. Felen vittnar tydligt om att förståelsen av logaritmlagarna är dålig.

Felaktig formel
Ett stort antal fel beror på att studenterna använder felaktiga formler. Dessa formler kan gälla trigonometriska relationer, lösningarna till en andragradsekvation, potens- eller logaritmlagar, Pythagoras sats m.m. Studenterna prövar inte om en formel som de tror sig komma ihåg kan vara giltig.

[5] Ändå utgör trigonometrin ett prioriterat område i gymnasiekurserna, och uppgifterna på de nationella proven vittnar om högt ställda mål vad gäller begreppsförståelse inom detta område. Se vidare avsnitt 4.5.

Bristande räknefärdighet
Ett stort antal fel beror på rena räknefel. Hit räknar vi t.ex. fel i användning av de fyra räknesätten, felaktiga kvadreringar, tappade minustecken, m.m. Det mest förvånande är dock ett antal fall där studenterna inte inser hur de skall förenkla uttryck. Ett exempel:
Studenten har fått $(6/2)^2 - 7$, och beräknar detta till $36/2 - 14/2$. Om studenten istället hade utfört divisionen först, så skulle det kanske ha blivit rätt: $(6/2)^2 - 7 = 3^2 - 7 = 9 - 7 = 2$.

Hantering av ekvationer eller uttryck
Ett framträdande fel är att studenter blandar ihop förenkling av uttryck och lösning av en ekvation.

4.3.2 Tentamen på första ordinarie kurs i matematik

Emma Enström och Sara Isakssons har gjort en utförlig analys av tentamenslösningar på tre uppgifter från första ordinarie tentamen på kursen Matematik I vid KTH (Enström och Isaksson 2005). Författarna är studenter på utbildningsprogrammet *Civilingenjör & Lärare*, 200p, som ges vid KTH och Lärarhögskolan i Stockholm (LHS). Arbetet är gjort inom ramen för kursen Vetenskap, teknik och lärande, och handledare har varit Mikael Cronhjort, KTH och Gunilla Olofsson, Primgruppen, LHS.

Matematik I, 6p, är den första obligatoriska matematikkursen på flera av KTHs civilingenjörsprogram. Kursen behandlar huvudsakligen envariabelanalys, men också en del inledande algebra och kombinatorik.

Tre uppgifter valdes ut från kursens ordinarie tentamen utifrån varierande svårighetsgrad, kognitivt innehåll och vilka kunskapsområden som testas. De vanligaste felen har identifierats och klassificerats utifrån brister i de sex kompetenser som definieras i den tolkning av gymnasieskolans mål som gjorts vid *Enheten för beteendevetenskapliga mätningar* vid Umeå universitet (Palm m fl 2004). Vi ger här en kort beskrivning av de delar av studiens resultat som knyter an till temat kring gymnasieskolans mål och högskolans förväntningar.

Geometrisk summa
Den första av de granskade uppgifterna var en modelleringsuppgift som leder till en geometrisk summa. Vanliga förekommande fel är:

- *n* för antal termer och *N* för sista potensen förväxlas;
- samma bokstav används för att beteckna flera olika variabler, t ex får *n* beteckna såväl summationsindex som antal termer;
- felaktig formel för en geometrisk summa används, t ex används den slutna formel som utgår ifrån att indexeringen börjar vid $n = 0$ på en summa där indexeringen börjar på $n = 1$ eller vice versa;
- modelleringsfel, den sista termen ges felaktig potens;
- olika typer av felaktig användning av notation, exempelvis av likhetstecken eller summatecken;
- svar redovisas ej.

Extremvärden och absolutbelopp
Den andra granskade uppgiften var att bestämma alla extrempunkter till funktionen $f(x) = x^2 - |3x - 2|$. Bristande förståelse av absolutbeloppsfunktionen och bristande förmåga att algebraiskt och analytiskt (vid derivering) hantera beloppstecknet är vanligt förekommande fel. Många visar också dålig förståelse för absolutbelopp som aritmetisk operation, dvs man har svårigheter att tolka t ex $|3|$. Många visar också dålig förståelse för begreppet extrempunkt, något som visar sig när standardmetoderna inte fungerar p g a svårigheter med att derivera absolutbeloppsfunktionen[6].

Derivatans definition
Den tredje granskade uppgiften rörde derivatans definition:

Vad är derivatan av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & då \quad x \neq 1 \\ 3 & då \quad x = 1 \end{cases}$$

i punkten $x = 1$ och $x \neq 1$. Använd derivatans definition!

De mest frekventa felen var

- dålig förståelse av styckvis definierad funktion;
- dålig förståelse av begreppet differenskvot och hur derivatan i $x = 1$ definieras och beräknas som ett gränsvärde av differenskvoter;
- enklare aritmetiska och algebraiska beräkningsfel;
- felaktiga deriveringsregler;
- felaktig notation för gränsvärden.

4.4 Gymnasielärares bedömning

I Thunberg och Filipsson (2005c) rapporterar vi om resultaten av en enkätundersökning där gymnasielärare gav sin syn på KTHs repetitionsmaterial i matematik. Gymnasielärarna ombads där klassificera 33 uppgifter hämtade från Introduktionskurs i matematik 5B1120 med avseende på svårighetsgrad för två tänkta elevgrupper:

Grupp **G**, med ett medelstarkt betyg G på gymnasiets Matematik A-D.
Grupp **VG+**, med ett starkt betyg VG, på gränsen till MVG, på gymnasiets Matematik A-D.

---

[6] Som nämnts tidigare är just absolutbeloppsfunktionen ett av de stoffområden som tydligast faller mellan stolarna. Det behandlas väsentligen inte alls på gymnasiet, och vid högskolan, där man gärna föreställer sig att detta är för studenten bekant material, blir behandlingen för kort och pressad. Det är därför inte förvånande att just detta vållar svårigheter. Mer förvånande är kanske svårigheterna med extremvärdesbegreppet, eftersom just differentialkalkylens tolkningar och förståelsen av funktioners beteende (t ex extremvärden) är sådant som betonas hårt i gymnasiets kurser.

De 33 utvalda uppgifterna från KTHs introduktionskurs skulle för respektive elevgrupp placeras i en av fyra kategorier, **I - IV**, definierade enligt följande. En typisk elev i gruppen (G respektive VG+) har under gymnasiets kurs A-D

Kategori I lärt sig behärska denna typ av uppgift mycket väl och kan utan repetition självständigt lösa uppgifter av denna typ,

Kategori II lärt sig att behärska denna typ av uppgift väl, men behöver en kort repetition för att kunna lösa den självständigt,

Kategori III arbetat med denna typ av uppgift tillräckligt mycket för att förstå begreppen och frågeställningen och kan följa en given lösning, men har aldrig uppövat rutinfärdighet,

Kategori IV inte mött denna typ av uppgift annat än i enstaka exempel och saknar kunskap om begreppen eller saknar av annan orsak förmåga att följa en given lösning.

Uppgifterna var utvalda med tanke på att vara typiska för KTHs repetitionsmaterial. Inga av de svåraste uppgifterna i KTHs material togs med i enkäten och inte heller någon av de allra lättaste. Enkäten skickades med en påminnelse till 90 gymnasielärare i Stockholmsområdet, av dessa valde 19 stycken från ett tiotal skolor att besvara enkäten.

Resultaten var anmärkningsvärda.

- För G-eleven var det inte en enda av de 33 uppgifterna som placerades i kategori I och bara 7 placerades i kategori II, medan 12 placerades i kategori III och hela 14 i kategori IV. I klartext betyder detta att 80 procent av uppgifterna kräver ett grundligare studium än en kort repetitionskurs kan ge. Över 40 procent av uppgifterna var i princip helt obekanta från gymnasiet.
- För VG+ - eleven var det 8 uppgifter som placerades i kategori I, 14 i kategori II, 8 i kategori III och 3 i kategori IV. Även för en elev med betyg VG+ är alltså en tredjedel av uppgifterna egentligen för svåra för att tas med i en kortare repetitionskurs.

För G-eleven fördelar sig stoffet på de fyra kategorierna enligt följande:

Kategori I. Ingenting.

Kategori II. Bråkräkning, Räkning med heltalsexponenter, Kvadreringsregler, Andragradsekvationer.

Kategori III. Kvadratkomplettering, Rationella ekvationer, Trigonometriska ekvationer, Funktionssammansättning, Räkning med negativa heltalsexponenter.

Kategori IV. Olikheter, Absolutbelopp, Rotekvationer, Logaritmekvationer, Cirkelns ekvation, Förlänga med konjugatet, Dubbelbråk med parametrar.

För VG+ - eleven fördelar sig stoffet på de fyra kategorierna enligt följande:

Kategori I. Bråkräkning, Räkning med heltalsexponenter, Kvadreringsregler, Andragradsekvationer.

Kategori II. Räkning med negativa heltalsexponenter, Förlänga med konjugatet, Dubbelbråk med parametrar, Kvadratkomplettering, Rationella ekvationer, Trigonometriska ekvationer, Funktionssammansättning.

Kategori III. Olikheter, Rotekvationer, Logaritmekvationer.

Kategori IV. Absolutbelopp, Cirkelns ekvation.

4.5 Nationella prov och högskolans förväntningar

På skolverkets hemsida http://www.skolverket.se, under länken *Nationellt provsystem*, kan man läsa att det nationella provsystemet, som för gymnasiets matematik består av nationella prov samt en provbank med uppgifter, syftar till bl a att *”förtydliga målen och visa på elevers starka och svaga sidor”* och *”konkretisera kursmål och betygskriterier”*. Det är därför rimligt att se på de nationella proven som auktoritativ uttolkning av gymnasiets mål. Vid diskussioner med gymnasielärare har det också framkommit att de nationella provens utformning har en starkt styrande inverkan på prioriteringar och kunskapsmål i gymnasiets matematikundervisning.

I (Thunberg 2005) görs en jämförelse av KTHs förväntningar på nyantagna studenters kunskaper i matematik, så som de tar sig i uttryck i de frivilliga repetitions- och introduktionskurserna, och gymnasiets nationella prov i matematik. KTH-uppgifter hämtade ur den översikt som görs i (Thunberg och Filipsson 2005a), se avsnitt 4.1, jämförs med de offentliggjorda nationella proven från 2002 och 2005. Proven kan nås via Skolverkets hemsida, eller direkt på http://www.umu.se/edmeas/np/information/np-tidigare-prov.html .

Det är på intet sätt fråga om en uttömmande utvärdering av de nationella proven, fokus ligger enbart på de aspekter som i högskolans förberedande kurser betonas som viktiga förkunskaper – det handlar till stor del om räknefärdighet och kännedom om elementära funktioner.

4.5.1 Sammanfattning av resultat

Jämförelsen görs inom fem områden, numerisk räkning, algebraiska förenklingar, ekvationslösning, logaritmer och trigonometri. De nationella proven utmärks av att nödvändiga numeriska och algebraiska beräkningar är korta och enkla, och att eleven vid provtillfället har tillgång till en formelsamling med alla relevanta formler och identiteter; de krav som ställs på räknefärdighet är betydligt lägre än vad som krävs på KTHs inledande kurser, där studenten också förväntas kunna lösa uppgifterna utan formelsamling. Låt oss ge några typiska exempel.

Exempel 1 (bråkräkning)
I KTH-materialet utgör numeriska dubbelbråk ett betonat område. Den enda uppgift på de nationella proven från 2002 och 2005 som anknyter till detta är en uppgift från kurs A 2002, som inte kräver någon algoritmisk färdighet.

Vad är hälften av $1\tfrac{1}{2}$?

En typisk KTH-uppgift är t ex

$$\text{Beräkna } \frac{2-\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}.$$

Det mest krävande exemplet på bråkräkning i de granskade nationella proven är från Kurs D 2005, där bestämning av en viss bestämd integral leder fram till beräkningen

$$\frac{3^3}{3}-3-\frac{1}{3}+1.$$

Exempel 2 (rationella uttryck)
På nationellt prov kurs C 2005 ges uppgiften

$$\text{Använd konjugatregeln och förenkla } \frac{a+3}{a^2-9}.$$

Observera att eleven har tillgång till en formelsamling, där bl a konjugatregeln finns formulerad. En typisk uppgift ur KTH-materialet inom samma område, tänkt att lösas utan formelsamling, kan ha följande utseende

$$\text{Förenkla } \frac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2+ab}.$$

Inom området ekvationslösning testas på de nationella proven främst polynomekvationer av första och andra graden (lösningsformeln för andragradsekvationer finns i formelsamlingen). Även logaritm- och exponentialekvationer förekommer på de nationella proven, men de är då av sådan art att de kan lösas direkt i huvudet med hjälp av logaritm- eller exponentialfunktionens definition, med andra ord testar de snarare förståelsen av begreppens definition än förmågan att lösa ekvationer. Trigonometriska ekvationer förekommer också på provet till kurs D, de testar framförallt förståelsen för lösningarnas periodicitet. KTH-materialet innehåller visserligen ekvationer snarlika de på de nationella proven, men också många som kräver omfattande beräkningar, förenklingar, substitutioner eller användning av standardidentiteter.

Uppgifter med logaritmer förekommer mycket sparsamt på de granskade nationella proven, de som förekommer är av två typer: (i) uppgifter som direkt testar förståelsen av logaritmens definition, av sådana art att endast enkla huvudräkningar krävs; (ii) lösning av ekvationer härrörande från tillväxtproblem, eleven behöver här veta att man löser ut en obekant i exponenten genom logaritmering varefter själva beräkningen görs på räknedosan. I KTH-materialet däremot krävs däremot främst färdighet i att manipulera uttryck med hjälp av logaritmlagarna.

Trigonometriuppgifter utgör en betydande del av uppgifterna på kurs D-proven. Många av uppgifterna är ambitiösa, och ställer stora krav på begreppsförståelse. Även uppgifter som kräver förenklingar och omskrivningar förekommer, men komplexiteten på dessa är lägre än på motsvarande uppgifter i KTH-materialet.

Kommentar. Vårt intryck är att trigonometri är ett högt prioriterat område i gymnasiet; ändå är detta ett område där nyantagna studenter vid KTH har mycket stora problem. Möjligen är bytet från en miljö där formelsamling och räknare är självklara hjälpmedel till en där formler m. m. skall internaliseras i den egna kunskapen speciellt smärtsam inom trigonometrin. Det vore värdefullt att ha tillgång till statistik över lösningsfrekvensen på t ex trigonometriuppgifterna på de nationella proven, för att kunna jämföra med lösningsfrekvensen på likartade uppgifter på högskolans inledande kurser.

4.5.2 Utvärdering av undervisningen med nationella prov?

I de ovan citerade målen för det nationella provsystemet står det också att det ska *”ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapsmålen nås på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå*”. Ett naturligt sätt att göra detta på nationell nivå vore med longitudinella jämförelser; eftersom många av proven är hemligstämplade kan man utgå ifrån att uppgifter återanvänds, så underlag för sådana studier borde finnas. I ljuset av alla rapporter de senaste åren om försämrade matematikkunskaper i grund- och gymnasieskolan, vore sådana undersökningar av uppenbart intresse. Redan i *Förkunskapsproblem i Matematik?* (Skolverket 1998) diskuteras möjligheten till sådana uppföljningar; där hänvisas också till att detta är något som riksdagens revisorer vid ett flertal tillfällen har efterlyst. Vi har inte funnit några sådana publicerade studier.

5 Betyg och kursval i gymnasiet och den särskilda behörigheten

5.1 Förändringar i behörighetskraven

Det officiella uttrycket för högskolans förväntningar är de särskilda behörighetskraven. Här har stora förändringar skett de senaste tio åren.

5.1.1 Från 3 till G

Sedan mitten av nittiotalet utgörs en allt större del av de sökande till de tekniska högskolorna av studenter med betyg från programgymnasiet, där målrelaterade betyg ges enligt skalan IG (icke godkänd), G (godkänd), VG (väl godkänd) och MVG (mycket väl godkänd). Som nationell standard för särskild behörighet i matematik till civilingenjörsutbildningar sattes betyg G från gymnasiets kurs E. För studenter med betyg från det äldre linjegymnasiet, där betyg gavs i en femgradig relativ betygsskala 1 – 5, där 5 är högsta betyg, är den särskilda behörigheten betyg 3 från treårig kurs i matematik på naturvetenskaplig eller teknisk linje.

Hur förhåller sig dessa två krav till varandra? Eftersom såväl kurssystem som betygssystemets referensram och gradering ändrades är detta inte så lätt att svara på, men en vanlig bedömning som ofta framförs av aktiva gymnasielärare är att elever som idag får ett svagt G skulle ha fått betyg 2 i det äldre relativa systemet. Bytet av betygssystem har alltså inneburit en sänkning av den särskilda behörigheten.

5.1.2 Från E till D

Högskolor äger rätt att lokalt sänka de nationella behörighetskraven. Vid KTHs civilingenjörs-utbildningar sänktes 2003 den särskilda behörigheten i matematik till betyg G från kurs D, i stället för från kurs E; en anpassning till vad som var obligatoriskt på gymnasiets naturvetenskapliga program. De flesta tekniska högskolor har idag följt efter. Som noterats tidigare innebär kurs A-D som särskild behörighet en betydande sänkning jämfört vad som gällde fram till nittiotalets mitt, d v s 3 års matematik på teknisk eller naturvetenskaplig linje på linjegymnasiet.

Vid KTH antogs hösten 2004 drygt 1400 nya studenter till civilingenjörsprogrammen, av dessa deltog 1246 i det årligen återkommande förkunskapsprovet. Av dessa hade 912 betyg från programgymnasiet och av dessa hade 97 (10.7 %) stycken inte läst kurs E (Brandell 2004). Året innan antogs något fler studenter, men andelen av studenter med betyg från programgymnasiet som ej läst kurs E var ungefär densamma, 9.7%. På KTHs Öppen Ingång, som ingår i Brandells studie och som har studerats speciellt i föreliggande arbete, antogs 112 studenter, varav 85 hade betyg från programgymnasiet och 22 av dessa hade ej godkänt betyg från kurs E, dvs en högre andel än bland civilingenjörsprogrammen som helhet.

Gymnasielärare och skolledare har vid diskussioner om detta gjort bedömningen att i takt med att kurs E som särskild behörighet försvinner generellt kommer intresset för kursen på gymnasiet att falla drastiskt, om inte nya tillträdesregler ger någon slags bonus för kurser i t ex matematik utöver den särskilda behörigheten.

5.1.3 Betygsinflation

Till ovannämnda sänkningar skall adderas en icke obetydlig betygsinflation. Såväl vid KTH (Brandell 2004) som vid Umeå Universitet (Bylund och Boo 2003) redovisas resultat som visar att betygsinflationen mätt med högskolornas förkunskapsprov är ett helt steg på ett halvt decennium: studenter med betyg VG presterar idag resultat på samma nivå som studenter med betyg G för fem år sedan.

5.1.4 Förändringar på högskolan?

De särskilda behörighetskraven i matematik har sänkts radikalt under en tioårsperiod, både vad gäller kunskapsdjup (betyg) och kunskapsmängd (kurs/timantal).

Intressant är förstås hur högskolor och universitet har förändrat sina matematikkurser för att möta studenter med allt större variation i förkunskaperna. En närmare diskussion av detta ligger utom ramarna för denna rapport. En sammanställning finns redovisad i (Tengstrand 1999) och i Högskoleverkets rapport *Bra start i matematik* (Högskoleverket 1999). Anders Tengstrand och Ola Helenius redovisar också under hösten 2005 en utredning gjord åt Högskoleverket om dessa frågor (Högskoleverket 2005). Ovan nämnda rapport från Umeå Universitet (Bylund och Boo 2003) redovisar också resultat av en rad reformer i det första årets matematikkurser.

Man kan konstatera att cirka hälften av KTHs civilingenjörsprogram idag läser väsentligen samma obligatoriska matematikkurser som för 10 år sedan; antalet poäng är detsamma och väsentligen samma stoff behandlas. Enstaka moment kan ha utgått, och nödvändigt stoff ur gymnasiets kurs E (komplexa tal och polynomekvationer) har adderats till kursinnehållet, men någon strukturell anpassning till de förändrade behörighetsvillkoren och förkunskaperna har inte skett.

Ett antal program har adderat två poäng matematik under det första året. Dessa kurser introducerades hösten 2002 för att möta de förändringar som skett fram till dess. Vår bedömning är att det slopade kravet på Kurs E året därpå väsentligen åt upp denna förstärkning på två poäng. Ytterligare ett par program har prövat att införa en högskoleförberedande obligatorisk matematisk baskurs i början av åk 1, enligt den modell som har utvecklats i Linköping. Till saken hör att på flera program skedde utökningen av det första årets kurser i samband med större programrevisioner där man också tog bort tidigare obligatoriska kurser i matematik i högre årskurser.

5.2 Betydelsen av kursval och betyg i gymnasiet

Förkunskaperna spelar en avgörande roll för studieframgången. Det har visats bland annat i Gerd Brandells undersökning *Förkunskaper och studieresultat i matematik hos Luleås civilingenjörsstudenter. Rapport från två undersökningar av nybörjarna vid universitetet.* (Återgivet i rapporten *Räcker kunskaperna i matematik* (Högskoleverket 1999).

5.2.1 Betydelsen av betyget på Kurs D

Resultatet på det förkunskapstest som ges till nyantagna civilingenjörsstudenter vid KTH beror också starkt på gymnasiebetyget (Brandell 2004); liknande resultat har också rapporterats från Umeå Universitet (Bylund och Boo 2003). I Brandells rapport görs bedömningen att de studenter som har 4 poäng eller mindre på KTHs förkunskapstest har dåliga förutsättningar för att klara av studierna vid KTH. Av de studenter som har betyg G från gymnasiets Kurs D hade 2004 drygt 60% fyra poäng eller mindre, medan bara 27% av studenter med VG och knappt 9% av studenterna med

MVG hamnade i denna kategori.

Brandells bedömning stämmer mycket väl överens med resultaten från KTHs Öppen Ingång 2004-05. Under sitt första år på KTH läste dessa studenter tre obligatoriska matematikkurser: Matematik Baskurs, 4p, Matematik I, 6p, och Matematik II, 6p.

- 112 studenter registrerades på Öppen Ingång hösten 2004. Den absoluta merparten av dessa hade betyg från programgymnasiet.
- Av de registrerade på den högskoleförberedande Matematik Baskurs, den första obligatoriska matematikkursen, hade 87 stycken betyg från gymnasiets kurs D. Av dessa hade 21 stycken betyg G, 66 stycken hade betyg VG eller MVG. Efter två tentamenstillfällen var 83% av VG-MVG studenterna godkända på kursen, medan motsvarande siffra för G-studenterna var endast 38%.
- Matematik I är en första analyskurs. Av de kursregistrerade hade 75 studenter betyg från gymnasiets kurs D, varav 18 med betyg G och 57 med betyg VG eller MVG. Här var resultatet efter två tentamina att 75% av VG-MVG-gruppen var godkända, men endast 17% av G-gruppen. Resultatet från Matematik II (linjär algebra och inledande flervariabelanalys) är snarlikt.

Det visar att det formella särskilda behörighetskravet inte alls motsvaras av de outtalade faktiska förkunskapskraven. En mer genomgående analys av studieresultaten vid KTH för studenter med olika studiebakgrund och olika betyg vore av stort intresse.

5.2.2 Kurs E som förberedelse för högskolestudier

Studenter som har läst kurs E har bättre förutsättningar för matematikstudierna vid KTH. Av Lars Brandells rapport (Brandell 2004) framgår att

- Det är i första hand studenter med betyg G från Kurs D som väljer att *inte* läsa kurs E.
- Men även inom varje betygskategori från Kurs D, är resultatet från förkunskapstestet sämre bland dem som inte har läst kurs E. Detta gäller såväl 2004 som 2003 (det första året då kurs E ej var obligatorisk). I flera fall är skillnaden mycket tydlig.
- Ingen av uppgifterna på testet kräver kunskaper från Kurs E, trots detta presterar studenterna som läst kurs E markant bättre resultat. Det stöder tanken på att Kurs E är viktig för träning och tillämpning av färdigheter från tidigare kurser.

På KTHs Öppen Ingång 2004 antogs 22 stycken studenter med betyg från kurs D men ej från kurs E på programgymnasiet. 10 stycken av dessa hade betyg G från kurs D, 12 stycken hade betyg VG eller MVG på kurs D. Den grupp som har betyg G på kurs D och inte har läst kurs E, dvs de som precis uppfyller den särskilda behörigheten, har klarat sig mycket dåligt. Av 9 studenter i denna kategori på Matematik Baskurs är ingen godkänd. På Matematik I och Matematik II finns 8 registrerade studenter i denna kategori, varav en är godkänd på vardera kursen.

6 Diskussion

6.1 Om undersökningen

När vi började arbeta med denna undersökning hade vi, som så många av våra kollegor, en känsla av att det finns ett påtagligt glapp mellan gymnasiets och högskolans matematikundervisning. Men aldrig hade vi förställt oss att glappet skulle vara så stort och mångfasetterat, och samtidigt så pass tydligt och möjligt att precisera i termer av

- stoff som inte hör till gymnasiets kurser men som betraktas som förkunskaper vid högskolan,
- oklarheter om hur och till vilka delar en elev kan förväntas behärska det stoff som skall ingå i gymnasiets kurser A – D,
- synen på räknefärdighet och formelkännedom och dessa förmågors relevans för begreppsförståelse och problemlösningsförmåga.

De problem vi beskriver har uppmärksammats tidigare, men dessa insikter har inte haft tillräcklig genomslagskraft i utbildningsvärldens allmänna medvetande. Vi har själva blivit medvetna om dessa tidigare arbeten först genom arbetet med denna undersökning. Det är också slående hur konkreta förslag på åtgärder, konsistenta med vår beskrivning, återkommer i rapporter och utredningar under årens lopp, utan att detta har fått påverka utvecklingen av vare sig gymnasiets eller högskolans matematikutbildning.

Förvånande är också att högskolan inte har gjort klart för sig hur gymnasieskolans matematikundervisning har förändrats, och att man inte heller har analyserat effekterna av förändrade behörighetsvillkor.

Två av våra delprojekt har utgjorts av enkätundersökningar. Studenter och lärare på KTH fick besvara frågor om den inledande kursen vid KTH (se avsnitt 4.2), och en grupp gymnasielärare ombads att bedöma uppgifter från KTHs inledande kurser (avsnitt 4.4). Frågorna i enkäterna kräver en tolkning av den som besvarar enkäten, och enkätsvaren har i sin tur tolkats och sammanställts av oss. I bägge dessa enkäter var det också ett betydande bortfall, vilket gör att man skall vara försiktig med statistiskt grundade påståenden om hela den tillfrågade gruppens åsikter och bedömningar. Trots dessa osäkerhetsfaktorer vågar vi dra de slutsatser som har redovisats ovan, främst på grund av att de tre enkäterna ger tydliga och samstämmiga svar, som också är konsistenta med resultat på tester och prov och med övriga delprojekt.

Denna studie har om inte annat varit mycket lärorikt för oss som har varit delaktiga i projektet. Arbetet har gett oss en bättre förståelse för gymnasiets kunskapsmål i matematik, som de ser ut idag, och de svårigheter som nyantagna studenter vid KTH ställs inför.

6.2 Några förslag

Trots att vår undersökning är beskrivande och inte normativ till sin karaktär finns det ett antal förslag på förändringar som tycks oss oundvikliga.

- Förtydliga kunskapsmålen på gymnasiet. Utforma kunskapskraven på NV- och T-programmen med hänsyn till de reella förkunskapskraven vid matematikintensiva högskoleutbildningar. Jfr ADM-projektet (Björk och Brolin 1998).

- Differentiera gymnasiestrukturen. De som väljer program som förbereder för matematikintensiva högskoleutbildningar behöver öva betydligt mer matematiskt hantverk redan fr o m kurs A. Vi hävdar att det på intet sätt står i konflikt med att göra ämnet mer lustfyllt och meningsfullt; mening och förståelse kan aldrig uppnås utan förmåga. Vi hänvisar till de förslag som diskuteras i *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket 1999a), och av Matematikdelegationens arbetsgrupp 11-H.

- Se över behörigheten till matematikintensiva utbildningar, och se till att de inledande kurserna är anpassade till vad de särskilda behörighetsvillkoren faktiskt innebär.

- Förstärk matematikinslaget under det första året på t ex civilingenjörsutbildningarna med en kurs som tar hand om det som just nu faller i stoffgapet eller kulturklyftan.

- Differentiera undervisningen i matematik under de inledande högskolestudierna. De behörighetsvillkor vi har idag och en fortsatt breddad rekrytering till högskolan resulterar i en så stor spridning i förkunskaper och matematisk förmåga att det inte är rimligt att erbjuda alla studenter samma paket av obligatoriska matematikkurser.

6.3 Öppna frågor – fortsatta studier

Vi avslutar med ett antal frågor som har aktualiserats under vårt arbete och som vi tycker vore värda ytterligare belysning.

- En mer omfattande genomgång av de vanligaste läromedlen på gymnasiets naturvetenskapliga program, syftande till att klarlägga hur deras kunskapsmål förhåller sig till kunskapsmålen i läroplaner, kursplaner och efterfrågade kunskaper i de nationella proven och i högskolornas inledande kurser. Hur ser den reella läroplan ut som definieras av läroböckerna?

- Hur ser undervisningspraxis ut på gymnasiet? Är det läroboken som styr? Det talas ofta om lösning av standardiserade uppgifter enligt ett förelagt exempel i boken som ett dominerande inslag. Hur arbetar man för att uppnå mål som begreppsförståelse, modelleringskompetens och räknefärdighet (procedurkompetens)?

- Utvecklingen av resultaten på nationella proven över tiden – hur ser den ut? Vilka typer av uppgifter uppvisar goda resultat? Vilka områden har sämre resultat? Finns det systematiska förändringar över tid och mellan olika elevkategorier och uppgiftstyper?

- Att lära sig basfärdigheter i vuxen ålder – hur svårt är det? Vilka erfarenheter finns?

- Hur klarar sig studenter med olika förkunskaper och studiebakgrund i matematik vid universitet och högskolor? Finns det behov av en mer differentierad undervisning, och hur skulle den då utformas?

7 Referenser

Björk, Lars-Eric och Brolin, Hans (1998). *Matematik –Från gymnasieskolans NV-program till högskolan*. Delrapport inom ramen för det s k ADM-projektet (Analys av Datorns konsekvenser för Matematikundervisningen) vid Institutionen för Lärarutbildning vid Uppsala Universitet.

Brandell, Gerd. *Förkunskaper och studieresultat i matematik hos Luleås civilingenjörsstudenter. Rapport från två undersökningar av nybörjarna vid universitetet.*

Brandell, Lars (2004). *Matematikkunskaperna 2004 hos nybörjarna på civilingenjörs-programmen vid KTH.*

Bratt, Peter (2004). *Algebra – En undersökning av gymnisekurslitteraturen och nationella prov inför högskolestudier i matematik.* C-uppsats i matematik. Karlstads Universitet.

Bylund, Per och Boo, Per-Anders (2003). Studenters förkunskaper. *Nämnaren* nr 3, 2003.

Cronhjort, Michael (2005). *En studie av fel på tentamen 2004-08-27 i 5B1120 Introduktions-kurs i matematik, 1 poäng*. KTH.

Dunkels, Andrejs et. al. (2002). *Mot bättre vetande i matematik, 3:e upplagan*. Studentlitteratur. Lund.

Engström, Arne och Magne, Olof (2003a). *Medelsta-matematik – Hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94?* Rapport 2003:4 från Pedagogiska institutionen, Örebro Universitet.

Engström, Arne och Magne, Olof (2003b). *Svaga elever i matematik slås ut tidigt.* DN Debatt, måndag 6 oktober 2003.

Enström, Emma och Isaksson, Sara (2005). *Feltyper på tentamenslösningar – granskning av lösningar på tentamen i matematik vid KTH HT-04*. KTH.

Högskoleverket (1999a). *Räcker kunskaperna i matematik?*

Högskoleverket (1999b). *Bra start i matematik.*

Högskoleverket (2005). *Nybörjarstudenter och matematik – matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar.*
http://web2.hsv.se/publikationer/pressmeddelanden/2005/050818_ny.shtml

Jingulsecu, Gabriella. *Geometri – En undersökning av två läroböcker för gymnasiet och nationella prov inför högskolestudier i matematik.* Examensarbete.

Löwing, Madeleine (2004). *"Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare-elev och matematiklektionens didaktiska ramar"* (Goteborg Studies in Educational Sciences, nr 96) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Palm m.fl. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*, PM nr 199, Umeå Universitet.

Petterson, Rolf (2003). *Resultat av diagnostiska prov i matematik för nyantagna teknologer vid civilingenjörslinjerna Chalmers, 1973 – 2003.*

PISA 2003. En sammanfattning samt länkar finns på Skolverkets hemsida http://www.skolverket.se/sb/d/254

Skolverket (1998). *Förkunskapsproblem i matematik?*

Skolverket (2003). *Nationell utvärdering NU 03*.

SOU 2004:97 (2004). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande och kompetens.* Matematikdelegationens betänkande.

Tengstrand , Anders (1999). *Pedagogiskt utvecklingsarbete i matematik vid ingenjörsutbildningar i Sverige*, NyIng rapport nr 13.

Thunberg, Hans (2005). *Gymnasiets nationella prov och KTHs förkunskapskrav – en matematisk kulturklyfta?* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Thunberg, Hans och Filipsson, Lars (2005a) *Förväntade och önskade förkunskaper i Matematik vid KTHs civilingenjörsutbildningar.* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Thunberg, Hans och Filipsson, Lars (2005b) *Lärares och studenters syn på KTHs introduktionskurs i matematik.* KTH. www.math.kth.se/gmhf

Thunberg, Hans och Filipsson, Lars (2005c). *Gymnasielärares syn på KTHs introduktionskurs i matematik*. KTH. www.math.kth.se/gmhf

TIMMS 2003. Trends in International Mathematics and Science Study. Se http://www.umu.se/edmeas/timss2003/index.html

Utbildnings- och kulturdepartementet. (2005). *Ny värld – ny högskola.* Prop. 2004/05:162. http://www.regeringen.se/sb/d/108/a/46320