Förväntade och önskade förkunskaper i Matematik vid KTHs civilingenjörsutbildningar

Hans Thunberg, KTH Matematik
thunberg@math.kth.se
Lars Filipsson, KTH Matematik
lfn@math.kth.se

1 Inledning

I denna rapport inventerar vi de förväntade och önskade förkunskaperna i matematik vid KTHs civlingenjörsutbildningar så som de tar sig i uttryck i två frivilliga introdukitons- och repetitionskurser. *KTHs sommarmatematik* är ett nätbaserat självstudiematerial som alla nyantagna studenter rekommenderas att ta del av under sommaren innan de börjar vid KTH. Kursmaterialet återfinns på hemsidan för KTH Matematik, http://www.math.kth.se , för närvarande under adressen http://www.math.kth.se/SMK4/ . *Introduktionskurs i matematik, 1p,* är en icke-obligatorisk matematikkurs som ges under mottagningsveckorna för de nyantagna studenterna. Som kurslitteratur används de fem första kapitlen i *Mot bättre vetande i matematik* av A Dunkels m fl. Läsanvisningar till denna kurs finns också på KTH Matematiks hemsida, för närvarande under adressen http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1120/200405/ .

Såväl *KTHs sommarmatematik* som *Introduktionskurs i matematik* är utformade så att de måste uppfattas som utpräglade repetitionskurser, dvs materialet behandlas på ett sådant sätt att förutsätter en tidigare mer grundläggande behandling. Per definition är det också material som KTH Matematik anser vara relevanta och viktiga förkunskaper för fortsatta studier vid KTH. Kurserna kan alltså sägas utgöra ett uttryck för önskade och förväntade förkunskaper.

Tanken bakom denna inventering är att den skall kunna utgöra ett underlag vid jämförelser av de vid KTH förväntade och önskade förkunskaperna med gymnasieskolans mål och ambitioner i matematikundervisningen.

1.1 Avgränsning

Vi intresserar oss i denna rapport endast för det stoff som förekommer i de två nämnda kurserna. Exempelvis behandlas inte differential- och integralkalkyl. Uppgifterna är därför också av utpräglad räknefärdighetskaraktär. Detta skall inte tolkas som att KTH inte har några förväntningar på förkunskaper inom t ex problemlösningsförmåga, begreppsförståelse (utöver vad som krävs för att lösa uppgifter av nedanstående typ) eller inom differential- och integralkalkyl.

Skälet till denna avgränsning är att de ovannämnda kurserna är ett enkelt och relativt tydligt uttryck för de förväntade och önskade förkunskaperna just inom de områden som behandlas. En motsvarande inventering av andra stoffområden och kompetenser förefaller svårare att göra, och kräver andra metoder.

1.2 Val av exempel

Rapporten har formen av en exemplifierad katalog över begrepp, kunskaper och färdigheter. Övningar av olika svårighetsgrad och komplexitet förekommer naturligtvis; exemplen är valda så att de utgör typiska uppgifter av något högre svårighetsgrad. Annorlunda uttryckt ger vi *inte* exempel som är introducerande, lätta övningar och ej heller har vi valt ut de svåraste, mer udda, uppgifterna.

Observera att samtliga övningar i princip är tänkta att lösas utan formelsamling (även om naturligtvis kursmaterialet finns tillgängligt under övning) eller räknare.

Det mesta av stoffet förekommer i bägge kurserna; vi påpekar i denna framställning explicit när så inte är fallet.

2 Förekommande stoff: En katalog

2.1 Aritmetik och elementär algebra.

Aritmetik med rationella tal. Dubbelbråk.

<u>Exempel 1:</u> Förenkla följande uttryck $\dfrac{1/3 + 1/4}{1/5}$.

<u>Exempel 2:</u> Beräkna $\dfrac{2-\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}$.

<u>Exempel 3:</u> Beräkna $\dfrac{(3^{-4})^{(-5)}}{243^3}$.

Minsta gemensam nämnare.*

Kvadratrötter.

<u>Exempel 4:</u> Skriv om så att nämnaren inte innehåller rottecken: $\dfrac{1}{1-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$.

<u>Exempel 5:</u> Förenkla $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$.

<u>Exempel 6:</u> $\sqrt{2^{16}} =$ (pricka för ett alternativ) = 2^4 , 2^6, 2^8.

Algebraiska förenklingar. Tecken och parenteshantering. Kvadrerings- och konjugatregeln. Räkning med enklare rationella uttryck. Räkning med mer sammansatta rationella uttryck.# Minsta gemensamma nämnare. Att förenkla uttryck (och kunna bedöma vad som anses som en förenkling).

---

* Endast i *KTHs sommarmatematik*

\# Endast i *Introduktionskurs i matematik*

Exempel 7: Förenkla $(p+q)(p-q)-(p-q)^2$.

Exempel 8: Förenkla $\dfrac{4x-7y}{9y}-\left(\dfrac{5x+2y}{12y}-1\right)$.

Exempel 9: Sätt följande uttryck på gemensamt bråkstreck $\dfrac{a+2b}{1+\dfrac{1}{cx-1}}+\dfrac{2a+b}{1-\dfrac{1}{cx-1}}$.

Exempel 10: Förenkla $\dfrac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}$.

2.2 Formelhantering m.m.

Hantering av formler (identiteter), att lösa ut variabler.#

Exempel 11: Lös ut R ur formeln $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}$.

2.3 Polynom och polynomekvationer

Definition av polynom av grad *m* och tolkning av densamma (att kunna identifiera ett polynom och att kunna skriva ett polynom på standardform).#

Kvadratkomplettering (även med parametrar*). Bestämma nollställen och extremvärden ifrån kvadratkompletterad form.* **Formeln för lösning av andragradsekvationer**.

Exempel 12: Kvadratkomplettera $3x^2-24x+40$.

Exempel 13: Lös ekvationen $4x^2-4x+1=0$.

Exempel 14: Lös ekvationen $15(x-2)^2=16(x-2)$.

Faktorsatsen. **Känna till begreppet ”dubbelrötter”. Divisionsalgoritmen för polynom**.* **Polynomdivision** med ”liggande stolen” (och ”direkt division”*) med tillämpning på lösning av tredje ordningens polynomekvationer med en känd rot. **Teckenstudier av polynom.**

Exempel 15: Utför polynomdivisionen $\dfrac{3x^3+2x^2+x+11}{x^2+4x+5}$.

Exempel 16: Lös ekvationen $x^3+2x^2-1=0$.

Exempel 17: För vilka x gäller olikheten $x^3-3x^2+2x>0$.

2.4 Rationella funktioner

Endast i *Introduktionskurs i matematik*

* Endast i *KTHs sommarmatematik*

Faktorisering av täljare och nämnare. **Teckenstudier** av faktoriserade rationella funktioner.

Exempel 18: Lös olikheten men se först till att få 0 på en sida om olikhetstecknet:

$$\frac{1}{x} < 2x - 1.$$

2.5 Allmänt om ekvationer

Multiplikation av bägge led i ekvation med gemensam nollskild faktor. Addition av en och samma term till bägge led.

Linjära och rationella ekvationer.

Exempel 19: Lös ekvationen $\frac{3}{2x} + \frac{5}{6x} = \frac{2}{9} + \frac{5}{3x}$.

Känna till begreppen obekant, till skillnad från parameter.* Kunna lösa ekvationer med parametrar och **förstå innebörden av ekvationen kan bli singulär** (även om det ordet inte används) för vissa värden av parametrarna (linjära och enklare rationella ekvationer).*

Exempel 20: Lös ekvationen $\frac{x}{x+2a} + \frac{2}{x-3} = 1$.

Enklare potensekvationer och deras lösning med logaritmering (se nedan).

Ekvationer med absolutbelopp.#

Exempel 21: Lös ekvationen $|x-3| + x = 5$.

Lösning av ekvationer som innehåller t.ex. kvadratrötter, där lösningsproceduren kan ge upphov till "falska rötter".

Exempel 22: Lös ekvationen $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x-9}$.

Substitutioner vid ekvationslösning.

Exempel 23: Lös ekvationen $6^{x+1} + 6^{3-x} = 222$. (Ingen ledning om substitution ges i uppgiften, men lösta exempel finns strax tidigare i texten.)

Trigonometriska ekvationer (se nedan)

2.6 Potenser, logaritmer och exponentialfunktioner

Tolkning av positiva, negativa och brutna exponenter. Definition av *n*-te roten ur icke-negativa tal för positiva heltal *n*. Definition av *n*-te roten ur godtyckliga reella tal för udda heltal *n*.

Räkning med potenser och logaritmer (huvudsakligen naturliga logartimer**). Potens- och logaritmlagarna.** Logaritmer i godtycklig bas definieras, men de rekommenderade övningarna behandlar huvudsakligen den naturliga logaritmen. Läroboken *Mot bättre vetande i matematik*

* Endast i *KTHs sommarmatematik.*

\# Endast i *Introduktionskurs i matematik* som används på *Introduktionskurs i matematik* behandlar också sambandet mellan logaritmer i olika baser, men KTHs läsanvisning anger inga övningar på basbyte i logaritmer; vi anser därför att detta moment inte ingår i introduktionskursen.

Färdighet i numerisk räkning och ekvationslösning.

Exempel 24: Beräkna $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$.

Exempel 25: Beräkna $\sqrt[8]{(-2)^8}$.

Exempel 26: Beräkna $\sqrt[6]{25} - \sqrt[3]{-5} + \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[5]{-100000}}$.

Exempel 27: Avgör, utan approximationer (dvs med hjälp av potenslagarna, förf anm), vilket av talen som är störst: $\sqrt[3]{7}$ och $\sqrt[4]{13}$.

Exempel 28: Bestäm $\ln\dfrac{1}{e} + 2\ln\sqrt{e}$.

Exempel 29: Skriv på formen e^a: $\sqrt[3]{5}$.

Exempel 30: Lös ekvationen $(\ln x)^2 = \ln x^2$.

Exempel 31: Lös ekvationen $\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$.

Exempel 32: Lös ekvationen $5^{3x}2^x = \sqrt{250}$.

2.7 Trigonometri

Vinkelmått i radianer. Sinus- och cosinusfunktionerna (definierade på R / enhetscirkeln) och deras grafer. Tan-funktionen.* Sinus- och cosinus i rätvinkliga trianglar och för standardvinklar. Begreppen frekvens, amplitud och fasförskjutning. Trigonometriska formler som studenten förväntas kunna (d v s ha memorerat eller snabbt kan härleda vid behov): trigonometriska ettan, additionsformler, dubbla vinkeln, halva vinkeln, periodicitetsformler, symmetriformler, omvandling sinus och cosinus. Känna till produktformlerna.* Lösning av trigonometriska ekvationer.

Exempel 33: Bestäm det exakta värdet av $\cos(13\pi + 35\pi/6)$.

Exempel 34: Rita i samma koordinatsystem kurvorna $y = \cos x$ och $y = \cos\dfrac{x}{2}$.

Exempel 35: Lös ekvationen $\cos 4x = 1/2$.

Exempel 36: Lös ekvationen $\cos 3x = \cos(x - \pi/6)$.

Exempel 37: Lös ekvationen $\sin 2x - 4\cos x = 0$.

Exempel 38: Visa att för alla *v* gäller att $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$.

* Endast i *KTHs sommarmatematik*.

2.8 Funktionslära och analytisk geometri

Känna till begreppet existensområde (definitionsmängd) och innebörden av ”ej definierad för”.[*] **Förståelse för naturliga definitionsmängden för kvadratrots- och logaritm-funktioner**.* Kunna bestämma definitionsmängd till funktioner som är kvadratrötter ur rationella funktioner respektive logaritmer av polynom.*

<u>Exempel 39:</u> Bestäm definitionsmängden för funktionen $\sqrt{x^2 - 3x + \dfrac{7 - x^3}{x-1}}$.

<u>Exempel 40:</u> Bestäm definitionsmängden för funktionen $\ln(12 + x - x^2)$.

Evaluering av funktioner. Sammansättning av funktioner.[#]

<u>Exempel 41:</u> $g(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$. Bestäm $g(0.5)$.

<u>Exempel 42:</u> Man har att $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ och $g(x) = 3x^2 + 1$. Bestäm $g(x-1)$ och $f(g(x))$.

Absolutbelopp: definition, geometrisk tolkning, ekvationer[#]

<u>Exempel 43:</u> Lös ekvationen $|x-3| + x = 5$.

Grafisk och symbolisk representation av räta linjer på formen $y = kx + m$ (styckvis linjära funktioner[#]**), andragradskurvor** (parabler, ellipser [#] och hyberblar [#]**), potens- och exponentialfunktioner (och logaritmfunktioner *).**

<u>Exempel 44:</u> Rita kurvan $y = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}$.

<u>Exempel 45:</u> Rita kurvan $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

<u>Exempel 46:</u> Rita kurvan $(y-1)^2 = 2x$.

---

[*] Endast i *KTHs sommarmatematik.*

[#] Endast i *Introduktionskurs i matematik*

Exempel 47: Bestäm den geometriska betydelsen av ekvationen och rita motsvarande kurva:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

Translationer (och dilatationer[#]) av funktionskurvor.

Asymptoter: Grafisk representation av funktioner av typen $y = 1/(x^2 + ax + b)$, inklusive bestämning av vertikala asymptoter (förekommer som exempel i samband med faktorisering av andragradsuttryck)[*]. Asymptoter till (origo-centrerade) hyperblar.[#]

Känna till begreppet ”invers funktion” och att inversens graf fås genom spegling i $y = x$ (speciellt exponential - logaritm-par).*

3 Avslutande kommentarer

3.1 Stoff som inte kan förväntas ingå i gymnasiets kurser A - D

Vissa delar av ovanstående stoff är sådant som det är mer eller mindre välkänt att det inte ingår i gymnasiets kurser A – D i matematik.

- Polynomekvationer, faktorsatsen och polynomdivision (Exempel 15 och 16) ingår i gymnasiets Kurs E, men ej i lägre kurser. Detta framgår av t ex läromedlet *Matematik 3000*, ett av de vanligast förekommande. I kursplanen för Matematik C står visserligen att eleven efter avslutad kurs skall kunna lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering, men åtminstone i det studerade läromedlet tycks detta inte ha implementerats. Erfarenhetsmässigt är detta också nytt stoff för många studenter.
- Kägelsnitt i allmänhet, och speciellt cirkelns ekvation i sin allmänna form, (Exempel 45 – 47) kan inte sägas ingå i gymnasiets kurser A – E, även om det naturligtvis kan förekomma enstaka exempel i vissa läromedel. Kägelsnitt omnämns ej i kursplanerna för gymnasiets kurser A – E.

3.2 Frågor att gå vidare med

Under våren 2005 kommer vi i en enkät till gymnasielärare i Stockholmsområdet be dem bedöma ett urval av de exempel som här har redovisats, med avseende på hur dessa förhåller sig till de faktiska kunskaperna hos gymnasister i olika betygskategorier. Vi planerar också att använda materialet i denna rapport som underlag för jämförelser med innehållet i de nationella proven i matematik och i något av de vanligaste läromedlen på gymnasiet.

4 Referenser

Dunkels et. al. (2002) *Mot bättre vetande i matematik.* Studentlitteratur.

KTH Matematik. *Läsanvisningar till Introduktionskurs i Matematik.* http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1120/200405/

KTH Matematik. *KTHs sommarmatematik 2004.* http://www.math.kth.se/SMK4/

[#] Endast i *Introduktionskurs i matematik.*
[*] Endast i *KTHs sommarmatematik.*