

Kontrollskrivning, 2007-10-31, kl. 08.00–10.00.

SF1602 Differential- och Integralkalkyl (envariabel) linje, för .

Kontrollskrivning MODUL 2. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Newtons avsvärningslag lyder: *Ändringen per tidsenhet av en kropps temperatur är proportionell mot skillnaden mellan kroppens temperatur och det omgivande mediets temperatur.* Inför lämpliga beteckningar och uttryck detta uttalande i en matematisk formel.

Låt tiden betecknas med t , och temperaturen med T . För att understryka att temperaturen beror av tiden skriver vi $T(t)$. Vi skriver T_0 för omgivningens temperatur. Med dessa beteckningar lyder Newtons avsvärningslag

$$\frac{dT}{dt} = T'(t) = -k(T(t) - T_0),$$

där k är en (positiv) proportionalitetskonstant.

2. (MODUL 2) Vilken punkt (eller punkter) på kurvan $y = x^2$ ligger närmast punkten $(x, y) = (0, 1)$?

Låt (x, y) vara en punkt på kurvan $y = x^2$. Avståndet till punkten $(0, 1)$ ges av kvadratroten ur

$$F(x) = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - x^2 + 1.$$

Av geometriska eller algebraiska skäl ser vi att minimum antas, och kvadratroten av $F(x)$ antar sitt minimum samtidigt som $F(x)$. Vi deriverar $F(x)$:

$$F'(x) = 4x^3 - 2x.$$

Eftersom $F(x)$ är deriverbar överallt gäller vid minimum att $F'(x) = 0$. Detta ger

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En snabb beräkning ger vid handen att

$$F(0) = 1, \quad F(1/\sqrt{2}) = F(-1/\sqrt{2}) = \frac{3}{4}.$$

Minimavståndet blir alltså $\sqrt{3}/2$, och det antas i punkterna $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.