Kontrollskrivning, 2007-12-07, kl. 08.00–10.00.

SF1602 Differential- och Integralkalkyl (envariabel) linje, för .

Kontrollskrivning MODUL 5. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 5) Betrakta rotationsytan som uppkommer då kurvan

$$y = e^{-2x^2}$$

roterar runt y-axeln. Vi roterar även x-axeln runt y-axeln och får ett plan. Bestäm volymen på den kropp som ligger mellan planet och den första rotationsytan.

Vi delar upp kroppen med cylindriska snitt. Den cylindriska "brödskivan" med radie x och infinitesimal bredd radiellt dx har omkrets $2\pi x$, bredd dx och höjd e^{-2x^2}. Volymbidraget blir alltså

$$2\pi x\, e^{-2x^2}\, dx,$$

och att summera ihop alla sådana blir att bilda integralen

$$\int_0^{+\infty} 2\pi x\, e^{-2x^2}\, dx.$$

Integralen blir enligt insättningsformeln

$$\frac{\pi}{2}\Big[-e^{-2x^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

---

2. (MODUL 5) En bassäng som rymmer 3000 liter är fylld med förorenat vatten. Föroreningens koncentration är 5%. Man börjar tappa ur det förorenade vattnet med en hastighet av 50 liter i minuten. Samtidigt påfylles rent vatten med samma hastighet. Hur lång tid tar det innan koncentrationen gått ned till 1%? Vi antar att bassängvattnet hela tiden rörs om, så föroreningshalten är lika överallt. (5)

Vi låter $x(t)$ beteckna totala kvantiteten förorening i bassängen, i kg, vid tid t. Speciellt har vi att $x(0) = 150$, eftersom föroreningen initialt var 5%. Under en kort tidsrymd dt förlorar vi mängden

$$\frac{50}{3000}\, x(t)\, dt$$

förorening, dvs

$$dx = -\frac{50}{3000}\, x(t)\, dt = -\frac{1}{60}\, x(t)\, dt.$$

Detta skriver vi som differentialekvationen

$$x'(t) = -\frac{1}{60}\, x(t).$$

Denna har exponentiallösningen

$$x(t) = C_0\, e^{-t/60}.$$

Vi letar efter den tid t_1 då föroreningen är 1%, dvs då $y(t_1) = 30$. Detta inträffar då

$$e^{-t_1/60} = \frac{1}{5},$$

dvs då

$$t_1 = 60\, \ln 5,$$

räknat i minuter.