Tentamensskrivning, 2008-05-29, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg E krävs minst 16 p, för betyg D krävs 18 p, för betyg C krävs 22 p, för betyg B krävs 28 p, och för betyg A krävs 32 p. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - \tan(2x)}{e^x - 1 - x}.$$

(5p)

Vi har att

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + x^3 B_1(x), \quad \tan(2x) = 2x + x^3 B_2(x), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_3(x),$$

där B_1, B_2, B_3 är funktioner som är begränsade då x närmar sig 0. Detta innebär att

$$\frac{\ln(1+2x) - \tan(2x)}{e^x - 1 - x} = \frac{-2x^2 + x^3(B_1(x) - B_2(x))}{x^2/2 + x^3 B_3(x)} = \frac{-2 + x(B_1(x) - B_2(x))}{\frac{1}{2} + x B_3(x)} \to -4$$

då $x \to 0$.

---

2. Undersök om serien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3+1}}$$

konvergerar. (5p)

Vi ser att

$$0 \le \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3+1}} \le \frac{1}{n^{3/2}},$$

och eftersom

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

konergerar, ger jämförelsesatsen för serier att serien konvergerar.

---

3. Avgör hur många reella lösningar ekvationen

$$x\, e^{-x^2} = C$$

har, beroende på värdet på konstanten C. (5p)

V.g. vänd!

Funktionen är positiv för positiva x, och negativ för negativa x. Av symmetriskäl räcker det att först betrakta positiva C. I så fall logaritmerar vi:

$$F(x) = \ln x - x^2 = \ln C.$$

Vi deriverar F:

$$F'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1}{x}(1 - 2x^2),$$

vilket betyder att $F(x)$ växer för $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, och avtar för $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < +\infty$; maximum blir $F(2^{-1/2}) = -\frac{1}{2}\ln(2e)$. $F(x) \to -\infty$ då $x \to 0$ samt då $x \to +\infty$, så att $F(x)$ antar varje värde i intervallet $]-\infty, -\frac{1}{2}\ln(2e)[$ två gånger, och värdet $-\frac{1}{2}\ln(2e)$ en gång.

Svar: För $C = (2e)^{-1/2}$ har vi bara en lösning, och för $0 < C < (2e)^{-1/2}$ har vi två lösningar. För $C = 0$ har vi bara en lösning. För $C = -(2e)^{-1/2}$ har vi bara en lösning, och för $-(2e)^{-1/2} < C < 0$ har vi två lösningar. För $C > (2e)^{-1/2}$ och för $C < -(2e)^{-1/2}$ har vi inga reella lösningar.

---

4. Ett rep av längd L används till att konstruera en kvadrat och en cirkel. Bestäm minimum av den sammanlagda arean av kvadraten och cirkeln. (5p)

Låt x beteckna kvadratens sidlängd, och r cirkelns radie. Vi har

$$4x + 2\pi r = L.$$

Den sammanlagda arean blir

$$A = x^2 + \pi r^2,$$

och den ska vi minimera. Vi skriver

$$x = \frac{L - 2\pi r}{4},$$

och skriver om arean:

$$A = \frac{(L - 2\pi r)^2}{16} + \pi r^2.$$

Vi deriverar uttrycket:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2\pi(2\pi r - L)}{8} + 2\pi r.$$

Om vi sätter derivatan till noll får vi att

$$r = \frac{L}{2(\pi + 4)}.$$

Det är uppenbart att enbart cirkel eller enbart kvadrat inte kommer att minimera. Detta blir alltså enda återstående alternativet:

$$r = \frac{L}{2(\pi + 4)}, \qquad x = \frac{L}{4 + \pi}.$$

Den minimala arean blir då

$$A = \frac{L^2}{4(4 + \pi)}.$$

---

5. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad genom

$$f(x) = \int_0^x t(t+1)(t-2)\,e^{-t^2}\,dt.$$

Visa att funktionen antar sitt minimum i en punkt. Vilken? (5p)

Integranden är negativ för $0 < t < 2$, och positiv för $t > 2$. Det betyder at minimum inträffar för $x = 2$.

---

6. En dag började snön falla och det fortsatte att snöa med jämn hastighet under några timmar. En snöplog med den speciella egenskapen att dess hastighet är omvänt proportionell mot snötäckets tjocklek startade kl 12.00. Det visade sig att den tillryggalade en dubbelt så lång vägsträcka under den första timman som under den andra. När började det snöa? (5p)

Låt oss sätta tiden så att klockan 12.00 motsvarar $t = 0$. Låt nu $s(t)$ beteckna den tillryggalagda vägsträckan vid tiden t; då är förstås $s(0) = 0$. Nu gäller att

$$s'(t) = \frac{C}{t+T}, \qquad 0 \le t < +\infty,$$

där T betecknar antalet timmar sedan det började snöa, enligt modellen för snöfallet och plogens egenskaper. Det följer dessutom ur uppgiften att

$$2\,s(2) = 3\,s(1).$$

Eftersom

$$s(t) = C\ln(t+T) - C\ln T$$

blir således

$$2\,(C\ln(2+T) - C\ln T) = 3\,(C\ln(1+T) - C\ln T).$$

Om vi delar med C överallt blir

$$2\,(\ln(2+T) - \ln T) = 3\,(\ln(1+T) - \ln T),$$

vilket leder till

$$2\ln(2+T) - 3\ln(1+T) + \ln T = 0,$$

dvs

$$T(2+T)^2 = (1+T)^3.$$

Detta är en ekvation av tredje graden där högstagradstermerna tar ut varandra:

$$T(T^2 + 4T + 4) = T^3 + 3T^2 + 3T + 1,$$

så att

$$T^2 + T - 1 = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna

$$T = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

varav den negativa lösningen är orimlig. Det hade alltså gått

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

timmar sedan snöfallet började kl 12.00.

---

7. Ange summan av serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k\,(k+1)}.$$

(5p)

Serien erhålls vid Taylorutveckling av $\ln(1-x)$ kring $x=0$. Svaret blir $2\ln 2 - 1$.

---

8. En solid kropp erhålles genom att låta området $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, rotera kring x-axeln. Därefter borras ett cylindriskt hål längs med x-axeln med radie 1. Beräkna volymen av den kropp som återstår. (5p)

Ett vertikalt snitt i yz-led har arean $\pi x - \pi$, där $1 \leq x \leq 4$. Integrerar vi enligt skivformeln får vi volymen

$$\int_1^4 (\pi x - \pi)dx = \frac{9\pi}{2}.$$