

Matematiska Institutionen
KTH

Exam for the course Linjär algebra, SF1604 (och 5B1109), for F1 and D1, December 3, 2007, 08.00-13.00.

Written by: Olof Heden och Sandra Di Rocco

PROBLEM:

PART I

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar till den linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 8y - z = 9 \end{cases}$$

Koefficientmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

och $\det(A) = 0$ eftersom de första och sista kolonnerna är linjärt beroende. Detta betyder att systemet har oändliga många lösningar:

$$\{(1+t, 1, t) \in \mathbf{R}^3, t \in \mathbf{R}\}.$$

Samtliga lösningar till systemet beskriver linjen parallel till $(1, 0, 1)$ och som går genom punkten $(1, 1, 0)$:

$$(1, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$

2. (3p) Bestäm belopp och principalargument för samtliga komplexa tal som satisfierar ekvationen:

$$z^5 = -1.$$

Låt $z = |z|e^{i\theta}$. Då är:

$$|z|^5 = |-1| = 1, \text{ d.v.s } |z| = 1$$

Argumenten blir: $\theta_k = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ för $i = 0, \dots, 4$. Med tanken att principalargumentet α_k är sådant att

$$-\pi \leq \alpha_k \leq \pi$$

är principalargumentena:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{5}, \alpha_1 = \frac{3\pi}{5}, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \frac{-3\pi}{5}, \alpha_4 = \frac{-\pi}{5}.$$

3. (3p) Låt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen $(AB^T + 3A)^{-1}$.

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, AB^T + 3A = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB^T + 3A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -17 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. (3p) Visa att triangeln med hörn i punkterna $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 3)$ och $(2, -1, 2)$ är rätvinkligt och bestäm dess area och omkrets. (ON-system)

Låt $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 3, 3)$ och $C = (2, -1, 2)$. Triangelns sidorna är:

$$\vec{AB} = (1, 3, 2), \vec{AC} = (1, -1, 1), \vec{BC} = (0, -4, -1).$$

Man ser att $\vec{AB}$ är ortogonal mot $\vec{AC}$, då $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$. Eftersom $\|\vec{AB}\| = \sqrt{14}$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{BC}\| = \sqrt{16}$ är arean lika med $\frac{1}{2}\sqrt{42}$ och omkrets lika med $\sqrt{14} + \sqrt{3} + \sqrt{16}$.

5. (3p) Betrakta matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns en diagonalmatris D och en ortogonalmatris Q sådan att $A = QDQ^T$. Bestäm i så fall D och Q .

Eftersom matrisen A är symmetrisk, så är A ortogonalt diagonaliserbar. Detta betyder att det finns en diagonalmatris D och en ortogonalmatris Q sådan att $A = QDQ^T$.

Eigenvärden till matrisen A , som är lösningar till $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, är $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$. Eigenrummen E_1 och E_3 , har dimension 1 och $E_1 = \text{Span}(1, 1)$, $E_3 = \text{Span}(1, -1)$. Efter man normerar dem får man en ON bas, och basbytematrisen är:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Diagonalmatrisen D är:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

DEL II

6. (3p) För vilka värden på talet a är den kvadratiske formen:

$$x^2 + y^2 + ayz + z^2,$$

in de tre variablerna x, y, z , positivt definit?

En kvadratisk form, Q , är positivt definit om och endast om alla egenvärdena till den associerad matris, A_Q , är positiva.

$$A_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A_Q - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \frac{a^2}{4}) = (1 - \lambda)(\lambda - \frac{2+a}{2})(\lambda - \frac{2-a}{2})$. De egenvärdena till matrisen är $\lambda = 1, \frac{2+a}{2}, \frac{2-a}{2}$. De är alla positiva om $a + 2 > 0$ och $2 - a > 0$, d.v.s

$$-2 < a < 2.$$

7. Låt A vara den linjära avbildning som speglar vektorerna, i den vanliga tredimensionella rummen, i planet med ekvationen $x + 3y - 2z = 0$. (ON system).

- (a) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt ett basystem som du väljer själv, vilket du vill. Låt $(x_o, y_o, z_o) \in \mathbf{R}^3$. Linjen l , normal till planet $x + 3y - 2z = 0$, och som går genom punkten (x_o, y_o, z_o) har ekvation:

$$(x, y, z) = t(1, 3, -2) + (x_o, y_o, z_o).$$

Punkten, P , där linjen träffar planet är den punkt på linjen som satisfierar ekvationen $x + 3y - 2z = 0$. Detta ger $14t + (x_o + 3y_o - 2z_o) = 0$ och $t = -\frac{1}{14}(x_o + 3y_o - 2z_o)$. Då är

$$P = -\frac{1}{14}(x_o + 3y_o - 2z_o)(1, 3, -2) + (x_o, y_o, z_o)$$

Bilden av punkten (x_o, y_o, z_o) genom avbildningen A , $A(x_o, y_o, z_o)$, är den punkt på linjen l , sådan att

$$\|A(x_o, y_o, z_o) - P\| = \|P - (x_o, y_o, z_o)\|.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} A(x_o, y_o, z_o) &= -\frac{2}{14}(x_o + 3y_o - 2z_o)(1, 3, -2) + (x_o, y_o, z_o) = \\ &= \left(\frac{6}{7}x_o - \frac{3}{7}y_o + \frac{2}{7}z_o, -\frac{3}{7}x_o + \frac{-2}{7}y_o + \frac{6}{7}z_o, \frac{2}{7}x_o + \frac{6}{7}y_o + \frac{3}{7}z_o\right). \end{aligned}$$

Matrisen, med avseende till standardbasen, B , är:

$$[A]_B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (b) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt att basystemet $B' = \{\vec{e}_1 = (1, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 1), \vec{e}_3 = (1, 1, 1)\}$.

Den basbyte matrisen, från B' till B är:

$$T_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

och

$$T_{BB'} = T_{B'B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningens matris relativt att basystemet B' blir då:

$$[A]_{B'} = T_{BB'}[A]_B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & -8 & 3 \\ -9 & 1 & 4 \\ 11 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. (4p) Finns det någon tredjegrads ekvation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

som har precis två reella rötter och en ickereel rot, sådan att a and b är reella tal medan c är en ickereelt tal?

Låt $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_3 = \alpha + i\beta$, där $\beta \neq 0$ vara rötterna till ekvationen. Då är $a = -x_1 - x_2 - \alpha - i\beta$ som inte är reelt ($\beta \neq 0$). Detta visar att det finns ingen sådan ekvation.

DEL III

9. Låt A och B vara 3×3 matriser.

- (a) (2p) Visa att om kolonnmatrisen X är en egenvektor till båda A och B så är X också en egenvektor till AB .

Om $AX = \lambda_A X$ och $BX = \lambda_B X$ så är

$$ABX = A(BX) = A(\lambda_B X) = \lambda_B AX = \lambda_B \lambda_A X.$$

- (b) (2p) Är det alltid sant att om kolonnmatrisen X är en egenvektor till båda B and AB så är X en egenvektor till A ? Nej, det gäller inte för alla A, B . Till exempel:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

X är en egenvektor till båda B och AB , med egenvärde 0 (i båda fall), men

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \lambda X \text{ för alla } \lambda \in \mathbf{R}$$

(Observera att påståendet alltid gäller om egenvärdet för X till B är skilt från 0.)

- (c) Är det alltid sant att om kolonnmatrisen X är en egenvektor till båda A and AB så är X en egenvektor till B ? Nej, det gäller inte för alla A, B . Till exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X är en egenvektor till båda A och AB , med egenvärde 0 (i båda fall), men

$$B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda X \text{ för alla } \lambda \in \mathbf{R}$$

(Observera att påståendet alltid gäller om matrisen A är inverterbar.)

10. (a) (2p) Låt A beteckna den linär avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$ sådan att

$$A(1, 0, -1) = (2, 1, 0, 1), A(1, 1, 0) = (0, 1, 1, 2), A(0, 1, -1) = (1, 1, 1, -1).$$

Bestäm en linär avbildning B från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$ sådan att

$$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ för alla } \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Samt bestäm $\ker(B)$.

Vektorerna $\vec{w}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{w}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{w}_3 = (0, 1, -1)$ är linjärt oberoende för att

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Så är $S = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ en bas till $\mathbf{R}^3$.

Vektorerna $\vec{v}_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1, -1)$ är också linjärt oberoende: $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = 0$ ger $(2a + c, a + b + c, b + c, a + 2b - c) = (0, 0, 0, 0)$.

$a + b = a + b + c = 0$ ger $a = 0$, och $2a + c = 0$ ger $c = 0$ och då $b = 0$.

Därför kan man komplettera till en bas till $\mathbf{R}^4$:

$$S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_4\}.$$

Avbildningen B sådan att:

$$B(2, 1, 0, 1) = (1, 0, -1), B(0, 1, 1, 2) = (1, 1, 0), B(1, 1, 1, -1) = (0, 1, -1) \text{ och } B(\vec{v}_4) = 0.$$

är sådan att $BA(\vec{x}) = \vec{x}$ för alla $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Varje vektor $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ skrivs som $\vec{x} = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3$

$$\begin{aligned} B(A(\vec{x})) &= B(aA(\vec{w}_1) + bA(\vec{w}_2) + cA(\vec{w}_3)) = B(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_3) \\ &= aB(\vec{v}_1) + bB(\vec{v}_1) + cB(\vec{v}_3) = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 = \vec{x}. \end{aligned}$$

Matrisen $[B]_{S'S}$ har rank 3 eftersom:

$$[B]_{S'S} = (I_3 | 0)$$

B är surjektiv. Det följer att $\dim(Ker(B)) = 1$. Eftersom $Span(v_4) \subseteq Ker(B)$ är $Ker(B) = Span(v_4)$.

- (b) Låt A beteckna den linjär avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$. Under vilka förutsättningar finns det en linjär avbildning B från $\mathbf{R}^m$ to $\mathbf{R}^n$ sådan att

$$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ for all } \vec{x} \in \mathbf{R}^n?$$

Vad kan du säga om $Ker(B)$ i så fall?

Först observera att $B(0) = x$ för alla $x \in Ker(A)$. Så för att B existerar behöver man att $Ker(A) = \{0\}$ som betyder att A är one-to-one och $rk(A) = n \geq m$.

Så vi ska anta att $rk(A) = n \geq m$. I så fall låt $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en bas till $\mathbf{R}^n$. Vektorerna $A(\vec{v}_1), \dots, A(\vec{v}_n)$ är linjärt oberoende eftersom

$$rk([A]_S) = rk(A) = n.$$

Vi kan då komplettera till en bas till $\mathbf{R}^m$.

$$S' = \{\vec{w}_1 = A(\vec{v}_1), \dots, \vec{w}_n = A(\vec{v}_n), \vec{w}_{n+1}, \dots, \vec{w}_m\}$$

och definiera $B(\vec{w}_i) = \vec{v}_i$ för $i = 1, \dots, n$ och $B(\vec{w}_i) = 0$ för $i = n + 1, \dots, m$

$$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ for all } \vec{x} \in \mathbf{R}^n$$

Matrisen $[B]_{S'S}$ har rank 3 eftersom:

$$[B]_{S'S} = (I_n | 0 \dots 0)$$

som betyder att $\dim(Ker(B)) = m - n$ och att

$$Ker(B) = span(\vec{w}_{n+1}, \dots, \vec{w}_m).$$