Institutionen för matematik
KTH

Tentamenskrivning, 2008-01-14, kl. 14.00-19.00.
SF1608 (5B1115) Matematik 1 för Medial.
(5B1135 för I)

För betyg E (godkänt), D, C, B och A, krävs preliminärt minst 16, 19, 22, 26 respektive 30 poäng, inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.
Inga hjälpmedel!

1. Bevisa att
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
för alla naturliga tal $n \in \mathbb{N}$.

(3p)

2. Bestäm i intervallet $[-1, +1]$ alla lokala extrempunkter (och deras karaktär) för funktionen
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

(3p)

3. Beräkna
$$\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}.$$

(3p)

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y'' - 6y' - 7y = e^{-x}.$$

(3p)

5. Beräkna
$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx.$$

(4p)

6. Bestäm Taylorutvecklingen av tredje ordningen (kring 0) av
$$f(x) = \tan x.$$

(4p)

Vänd!

Vänd!

7. Vad är derivatan av funktionen

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 \quad ?$$

Visa resultatet genom att använda derivatans definition!

(5p)

8. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^3 - 3x + 2}.$$

(5p)

9. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(4x - \sin 4x)(1 - (1 + x)^5)}{x^4}.$$

(5p)

10. Lös "Keplers" differentialekvation (för $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$; $-E, m, \alpha, L > 0$)

$$(r')^2 = \frac{2Em}{L^2} r^4 + \frac{2\alpha m}{L^2} r^3 - r^2$$

genom att substituera

$$r(\varphi) = \frac{1}{w(\varphi) + \frac{\alpha m}{L^2}};$$

visa att

$$w(\varphi) = \sqrt{\frac{\alpha^2 m^2}{L^4} + \frac{2Em}{L^2}} \cos(\varphi + \varphi_0)$$

löser differentialekvationen för ett godtyckligt $\varphi_0$.

(5p)