

SF1620 Matematik och modeller

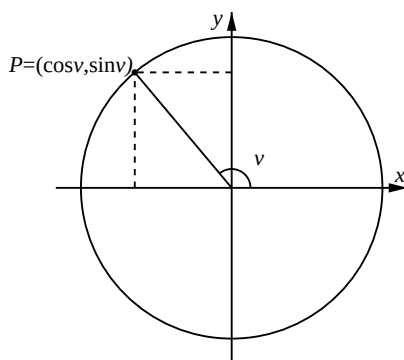
2007-09-10

2 Andra veckan — Trigonometri

De trigonometriska funktionerna och enhetscirkeln

Redan vid förra veckans avsnitt var det aktuellt att hantera vinklar som var större än 90° eller $\pi/2$. Det visar sig i många tillämpningar att man behöver långt mer än det. Det går i själva verket att definiera *sinus* och *cosinus* för alla reella vinklar. Genom att $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ går det också att definiera tangens för alla värden på x där $\cos(x) \neq 0$.

Ett användbart verktyg för detta är *enhetscirkeln* som är en cirkel med radie 1 och med centrum i origo i ett rätvinkligt koordinatsystem med en horisontell x -axel och en vertikal y -axel.



Punkter P på cirkelns periferi har koordinater

$$\begin{cases} x = \cos v, \\ y = \sin v, \end{cases}$$

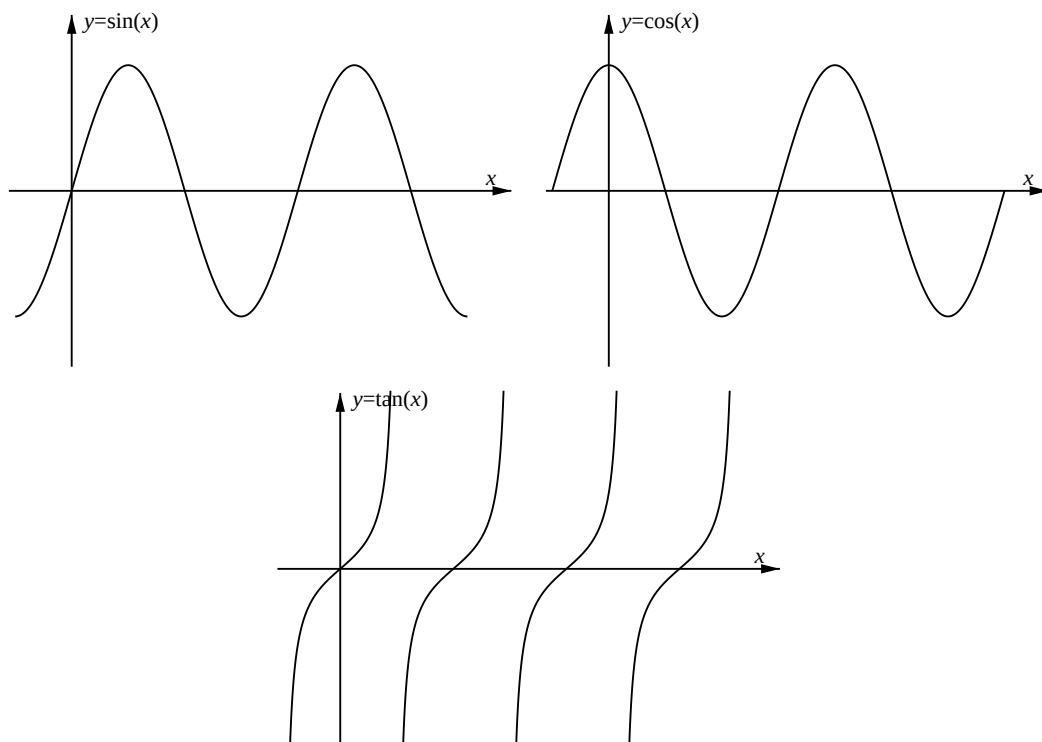
och vi kan definiera dessa *periodiskt* genom att mäta vinkeln i positiv riktning - motsols - från den positiva x -axeln och tillåta att man går flera varv runt. För varje varv ökar vinkeln v med 360° , eller 2π radianer. Observera att om vinkeln mäts i radianer så motsvarar den precis hur långt det är att gå utefter cirkeln från $(1, 0)$ till P .

Sats 1 (Trigonometriska ettan) För alla värden på x gäller att

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Övning 1 *Bevisa satsen genom att använda ekvationen för enhetscirkeln.*

Vi kan se på graferna för de tre funktionerna och se att sinus och cosinus är lika varandra, men förskjutna i förhållande till varandra med 90° , eller $\pi/2$ radianer.



Vi kan formulera detta som att

$$\sin(90^\circ + x) = \cos(x) \quad \text{eller} \quad \sin(\pi/2 + x) = \cos(x) \quad \text{för alla } x.$$

Vidare ser vi att cosinus är en *jämn* funnkction, dvs

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \text{för alla } x$$

och att sinus och tangens är en *udda* funktioner, dvs

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{och} \quad \tan(-x) = -\tan(x), \quad \text{för alla } x.$$

Både sinus och cosinus är *periodiska* med perioden 360° , eller 2π radianer, dvs

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) & \text{eller} & & \sin(x + 360^\circ) &= \sin(x) \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) & \text{eller} & & \cos(x + 360^\circ) &= \cos(x) \end{aligned}$$

för alla värden på x . Perioden för tangens är 180° eller π radianer, dvs

$$\tan(x + \pi) = \tan(x) \quad \text{eller} \quad \tan(x + 180^\circ) = \tan(x),$$

för alla värden på x .

Additionssatserna

Vi har sett att sinus och cosinus är förskutna i förhållande till varandra med en fjärdedels period. De kurvor som kan fås med andra förskjutningar kan skrivas som sammanvägningar av sinus och cosinus.

Sats 2 (Additionssatsen för sinus) För alla x och y gäller att

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

Övning 2 Bevisa additionssatsen för värden på x och y som kan vara de mindre två vinklarna i en triangel genom att betrakta höjden mot den största vinkeln.

Sats 3 (Additionssatserna för sinus och cosinus) För alla x och y gäller att

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y), \\ \sin(x - y) &= \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y), \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \\ \cos(x - y) &= \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y).\end{aligned}$$

Övning 3 Använd förskjutningar med 90° eller $\pi/2$ för att härleda de övriga formelerna från additionssatsen för sinus.

Med hjälp av dessa kan vi härleda många andra formler och samband för de trigonometriska funktionerna. De första är formelerna för *dubbla vinkeln*, dvs det vi får i additionssatserna om $y = x$.

Sats 4 (Formler för dubbla vinkeln) För alla värden på x gäller att

$$\begin{cases} \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x). \end{cases}$$

Uttrycket för cosinus för dubbla vinkeln kan skrivas om på två sätt med hjälp av den trigonometriska ettan. Vi får att

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x).$$

Detta kan vi använda för att härleda formler för halva vinkeln.

Sats 5 (Formler för halva vinkeln) För alla värden på x gäller att

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2} \quad \text{och} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}.$$

Amplitud, vinkelhastighet och fasförskjutning

Ett vanligt sätt som sinusfunktioner förekommer i tillämpningar är på formen

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

där A är *amplituden*, ω (omega) är *vinkelhastigheten* och ϕ (fi) är *fasförskjutningen*. Genom att använda additionssatsen för sinus kan vi skriva om ett sådant uttryck som

$$f(t) = A \sin \phi \cos \omega t + A \cos \phi \sin \omega t.$$

Det betyder också att vi kan gå åt andra hållet och skriva om ett uttryck på formen

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

som ett uttryck med amplitud och fasförskjutning om vi får att

$$\begin{cases} a &= A \sin \phi, \\ b &= A \cos \phi. \end{cases}$$

För att få till det kan vi se på

$$a^2 + b^2 = A^2 \sin^2 \phi + A^2 \cos^2 \phi = A^2$$

och

$$\frac{a}{b} = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \tan \phi.$$

Perioden för funktionen $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ ges av det minsta positiva värde T så att

$$f(t + T) = f(t), \quad \text{för alla värden på } t.$$

Övning 4 Visa att perioden, T , för $A \sin(\omega t + \phi)$ ges av

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Trigonometriska ekvationer

De mest grundläggande trigonometriska ekvationerna har formen

$$(1) \quad \sin x = a, \quad (2) \quad \cos x = a, \quad \text{eller} \quad (3) \quad \tan x = a.$$

För att de första två ska ha någon reell lösning alls krävs att $-1 \leq a \leq 1$, medan den tredje ekvationen alltid har reella lösningar. Eftersom funktionerna $\sin(x)$, $\cos(x)$ och $\tan(x)$ är periodiska förekommer lösningarna till ekvationerna också periodiskt. Om $x = x_0$ är en lösning till den

första ekvationen är också $x_0 + 2\pi$ en lösning och om $x = x_0$ är en lösning till den tredje ekvationen är $x_0 + \pi$ en lösning. I själva verket får vi en oändlig uppsättning lösningar $x = x_0 + 2\pi n$, respektive $x = x_0 + \pi n$, där n kan vara vilket heltal som helst.

Genom att titta på enhetscirkeln kan man se att det i intervallet $0 \leq x < 2\pi$ finns två lösningar till (1) och två lösningar till (2) om $-1 < a < 1$. Däremot finns det för $a = \pm 1$ bara en lösning i samma intervall.

Genom egenskaperna hos sinus och cosinus ser vi också att om x_0 är en lösning till (1), så är också $180^\circ - x_0$, eller $\pi - x_0$ en lösning. På samma sätt är $-x_0$ en lösning till (2) om x_0 är det.

En mer allmän trigonometrisk ekvation kan ofta formuleras om till en av de grundläggande varianterna genom att använda olika trigonometriska och algebraiska samband. Exempelvis kan vi för en ekvation

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = c$$

först skriva om vänsterledet som $A \sin(\omega t + \phi)$. Vi får då

$$A \sin(\omega t + \phi) = c$$

Sedan kan vi göra variabelbytet $x = \omega t + \phi$ och ekvationen hamnar då i den mer grundläggande formen

$$\sin x = \frac{c}{A}.$$

När vi har löst den och får en lösningar

$$x = x_0 + 2\pi n \quad \text{och} \quad x = \pi - x_0 + 2\pi n$$

kan vi lösa ut t som $(x - \phi)/\omega$ och

$$t = \frac{x_0 - \phi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega} \quad \text{och} \quad t = \frac{\pi - x_0 - \phi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}.$$

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 2.1

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan\left(3\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

- b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna $1/4$, respektive $1/2$. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. (3)

- c) Om $\cos \alpha = 1/4$ och $\cos \beta = x$, vad är det då för villkor på x för att triangeln har två vinklar som är lika? (2)

Övning 2.2

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. (4)

- b) Skriv om $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t$ på formen $A \sin(\omega t + \phi)$. (3)

- c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c$$

där a , b och c är reella konstanter. (2)

Övning 2.3

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin 4x = \cos 5x. \quad (3)$$

- b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

- c) Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för $\sin \pi/12$. (2)

Övning 2.4

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan 2x = \sqrt{3}. \quad (3)$$

- b) För att bestämma extremvärdena för funktionen $f(x) = \sin 2x \cos x$ leds man till att finna nollställena till derivatan $g(x) = f'(x) = 2 \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. Förenkla uttrycket för $g(x)$ och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen $g(x) = 0$. (4)

- c) Härled formeln

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. (2)

Övning 2.5

- a) Skriv om $\sin x - \sqrt{3} \cos x$ på formen $A \sin(x + \phi)$. (3)

- b) Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}. \quad (4)$$

- c) Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för $\sin(x/2)$ uttryckt i $\cos x$. (2)

Övning 2.6

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen (4)

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- b) Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om $\sin 3x$ som ett polynom i $\sin x$ och $\cos 3x$ som polynom i $\cos x$. (5)

Övning 2.7

- a) Rita upp grafen för funktionen $f(x) = 3,5 \cos(4,4x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi/3$ och bestäm alla lösningar till ekvationen

$$3,5 \cos(4,4x) = 1,2$$

i samma intervall. Ange lösningarna med två värdesiffror. (4)

- b) Hur många lösningar har ekvationen

$$\sin(\omega t + \phi) = 0,242$$

i intervallet $0 \text{ ms} \leq t \leq 94 \text{ ms}$, om $\omega = 3,14 \cdot 10^2$ radianer/s och $\phi = -2\pi/3$? (2)

- b) Man kan skriva om $a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t + 2\pi/3)$ på formen $A \sin(\omega t + \phi)$. Bestäm amplituden A uttryckt i a och b . (3)

Övning 2.8

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

- b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$1,2 \sin x + 1,4 \cos x = 0,54$$

med två gällande siffrors noggrannhet. (4)

- c) Använd sinussatsen för att härleda additionssatsen för sinus i det fall då alla inblandade vinklar ligger mellan 0° och 180° . (2)

Övning 2.9

- a) Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1. \quad (3)$$

- b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x = 0. \quad (3)$$

- c) Vilket är det minsta positiva tal, x , där det inte spelar någon roll om man har miniräknaren inställd på radianer eller grader när man skall beräkna $\sin x$? (3)

Övning 2.10

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

- b) Bestäm ett närmevärde med två gällande siffror till den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\sin x + 2 \cos x = \sqrt{2} \quad (4)$$

- c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0. \quad (2)$$

Övning 2.11

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(2t + \pi/5) = -\sqrt{3} \quad (4)$$

- b) Bestäm med två värdesiffrors noggrannhet konstanterna A och ϕ sådana att

$$A \sin(x + \phi) = 5 \sin x - 3 \cos x. \quad (3)$$

- c) Skriv $\cos 4x$ som ett polynom i $\cos x$. (2)

Övning 2.12

- a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $5\pi \leq t \leq 7\pi$ till ekvationen

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ange svaret exakt i radianer. (3)

- b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$5 \sin x + 8 \cos x = 0$$

med en noggrannhet på tre gällande siffror. (3)

- c) Uttrycket $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ kan skrivas om på formen $A \sin(2x + \phi) + B$. Bestäm konstanterna A och B uttryckta i a , b och c . (3)

Övning 2.13

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3x + \pi/4) = \sqrt{3}. \quad (3)$$

- c) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$2,0 \sin x - 3,2 \cos x = 2,4.$$

Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. (4)

- c) Bestäm konstanterna a och b så att kurvan $y = a \cos x + b \sin x$ går genom punkterna $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (\pi/3, -1)$. (2)

Övning 2.14

- a) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\sin(5x + 3\pi/5) = 0,96$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Ange svaren som närmevärden med två decimalers noggrannhet. (4)

- b) Bestäm exakta uttryck för samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

- c) Härled formeln för tangens av dubbla vinkeln, det vill säga uttryck $\tan 2x$ i $\tan x$. (2)

Övning 2.15

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos(2x + \pi/3) = 0,62$$

i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. (3)

b) Skriv om uttrycket $4 \sin x + 3 \cos x$ på formen $A \cos(x + \phi)$. (3)

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 x + \sin 2x = 1.$$

(3)

Övning 2.16

a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ till ekvationen

$$2 \tan(3x + 2) = 1.$$

Ange svaren i radianer med två gällande siffrors noggrannhet.

(3)

b) Skriv $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ på formen $A \sin(2x + \phi)$. Ange svaret exakt.

(3)

c) Bestäm exakta värden på samtliga lösningar till ekvationen

$$2 \sin^2 x + \sin 2x = 2.$$

(3)

Övning 2.17

a) Bestäm de två minsta positiva lösningarna till ekvationen

$$13 \sin\left(\frac{3\pi t - 2\pi}{10}\right) = 8.$$

Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet.

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + 3 \cos^2 t = 1$$

Ange svaren på exakt form.

(3)

c) Bestäm konstanterna a , b och ω så att ekvationen

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = 2$$

har lösningarna $t = -2 + 24n$ och $t = 4 + 24n$, där n är ett godtyckligt heltal. Ange svaren på exakt form.

(3)

Övning 2.18

a) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\cos(3x + \pi/7) = 1/4.$$

Ange svaret i radianer med två värdesiffrors noggrannhet.

(3)

b) Bestäm konstanterna A och ϕ så att $2 \cos 2x + \sin 2x = A \cos(2x + \phi)$. Ange svaren som närmevärden med två värdesiffrors noggrannhet.

(3)

c) Bestäm det exakta antalet lösningar till ekvationen $\tan 5x = \sin 10x$ i intervallet $0 \leq x \leq 100$.

(3)

Facit

Övning 2.1

- a) $x = 2/9 + n/3$, där n är ett heltal.
- b) Cosinus för den tredje vinkeln är $(3\sqrt{5} - 1)/8$.
- c) $x = 1/4$ eller $x = \sqrt{6}/4$.

Övning 2.2

- a) Samtliga lösningar ges av $t = \pm 1/150 + n/50$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = 13 \sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1, 18$.
- c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ och det minsta är $c - \sqrt{a^2 + b^2}$.

Övning 2.3

- a) Lösningarna är $x = \pi(1 - 4n)/18$ och $x = \pi(4n - 1)/2$ där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal.
- c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$.

Övning 2.4

- a) Lösningarna är $x = \pi/6 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Vi kan skriva $g(x) = 2 \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x)$ och lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$, och $x = \pm \arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0, 62 + n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.5

- a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$.
- b) Lösningarna är $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ och $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.
- c) $\sin(x/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos x)/2}$, med positivt tecken om $4\pi n \leq x \leq 4\pi n + 2\pi$ för något heltal n , annars negativt.

Övning 2.6

- a) Lösningarna är $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ och $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Vi får att $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ och $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Övning 2.7

- a) Lösningarna är $x = 0, 28$, $x = 1, 2$ och $x = 1, 7$.
- b) Det finns nio lösningar till ekvationen i intervallet.
- c) Amplituden är $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Övning 2.8

- a) Lösningarna till ekvationen ges av $x = 5\pi/2 + 3\pi n$ och $x = 3\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal. ($150^\circ + n \cdot 540^\circ$ och $n \cdot 540^\circ$.)
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x \approx 2, 0$.

Övning 2.9

- a) Lösningarna är $x = 11\pi/36 + 2\pi n/3$ och $x = 19\pi/36 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

- b) Lösningarna är $x = n\pi$, $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 4\pi/3 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal. (Lösningen kan också skrivas som $x = 2\pi n/3$ och $(2n + 1)\pi$, för godtyckligt n .)
- c) Det minsta positiva tal som uppfyller kravet är $x = 180\pi/(180 + \pi)$.

Övning 2.10

- a) Lösningarna är $23\pi/24 + 2\pi n/5$ och $29\pi/24 + 2\pi n/5$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 1, 35$. ($77, 3^\circ$)
- c) Lösningarna är $n\pi/2$ och $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.11

- a) Lösningarna ges av $x = -4\pi/15 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) $A = \sqrt{34} \approx 5, 8$.
- c) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

Övning 2.12

- a) Lösningarna $t = 16\pi/3$ och $t = 17\pi/3$ är de enda i det givna intervallet.
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 2, 13$ eller $x = 122^\circ$ med tre gällande siffrors noggrannhet.
- c) $A = (\sqrt{b^2 + (c - a)^2})/2$ och $B = (a + c)/2$.

Övning 2.13

- a) Lösningarna ges av $x = \pi/26 + n\pi/3$ där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 1, 70$ radianer.
- c) Konstanterna är $a = 2$ och $b = -4\sqrt{3}/3$.

Övning 2.14

- a) Lösningarna i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ är $x \approx 1, 14$, $x \approx 1, 25$, $x \approx 2, 39$ och $x \approx 2, 51$.
- b) Samtliga lösningar ges av $x = 7\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 11\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.
- c) $\tan 2x = 2 \tan x / (1 - \tan^2 x)$.

Övning 2.15

- a) Lösningarna är $x = 2, 17$, $x = 3, 07$, $x = 5, 31$ och $x = 6, 21$, med tre gällande siffrors noggrannhet.
- b) $4 \sin x + 3 \cos x = 5 \cos(x + \phi)$, där $\phi = -\arctan(4/3) \approx -0, 927$.
- c) Lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$ och $x = \arctan(1/2) + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.16

- a) Lösningarna är $x = -0, 51$ och $x = 0, 54$, med två värdesiffrors noggrannhet.
- b) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x + \pi/3)$.
- c) Lösningarna ges av $\pi/2 + n\pi$ och $x = \pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.17

- a) De två minsta positiva lösningarna är $t = 1, 37$ och $t = 3, 30$, med tre gällande siffrors noggrannhet.
- b) Lösningarna ges av $t = \pi/2 + n\pi$ och $t = -\pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
- c) Konstanterna skall vara $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$ och $\omega = \pi/12$.

Övning 2.18

- a) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 0, 29$.
- b) $A = \sqrt{5} \approx 2, 2$ och $\phi \approx -0, 46$.
- c) Det finns 479 lösningar till ekvationen i intervallet $0 \leq x \leq 100$.