

SF1620 Matematik och modeller

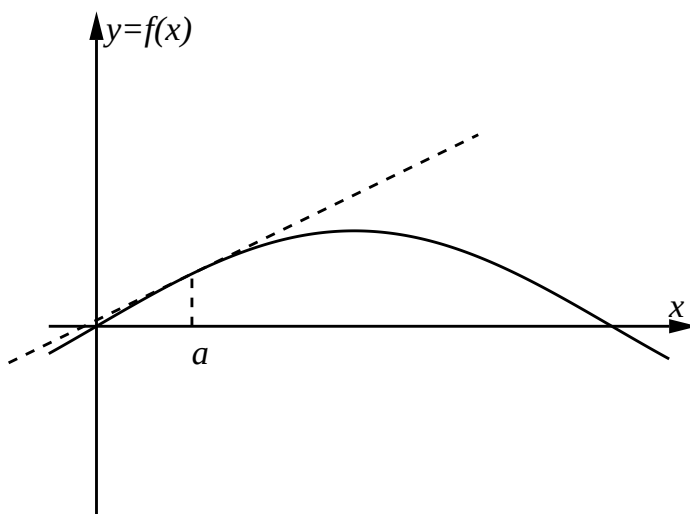
2007-09-17

3 Tredje veckan — Deriveringsregler

Tolkningar av derivator

Tangentens lutning

Ett vanligt sätt att tänka sig *derivatan* av en funktion $f(x)$ är att se på grafen för funktionen och sedan på *tangentens lutning* i en viss punkt. Vi tänker oss då att det är lätt att inse vad som menas med en tangent, dvs en rät linje som går genom punkten $(a, f(a))$ och som på något vis ligger mot grafen.



Vi kallar då riktningskoefficienten för tangenten i punkten $(a, f(a))$ för $f'(a)$ och vi kan då skriva tangentens ekvation som

$$y = f'(a)x + b$$

för någon konstant b . För att ta reda på b kan vi sätta in $x = a$ och ska då få

$$f(a) = f'(a)a + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = f(a) - af'(x).$$

Linjär approximation

Ett annat sätt är att tänka sig att man förstorar upp området kring punkten $(a, f(a))$ så att grafen för funktionen ser ut som en linje som går genom punkten. Riktningkoefficienten för den linjen är $f'(a)$ och vi har alltså att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

för x nära a .

Vi kan använda oss av linjär approximation för att se hur derivatan bör fungera i olika situationer. Exempelvis kan vi se hur derivatan av en produkt bör vara genom att se på

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\approx (f(a) + f'(a)\Delta x)(g(a) + g'(a)\Delta x) \\ &= f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))\Delta x + f'(a)g'(a)\Delta x^2 \\ &\approx f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))\Delta x \end{aligned}$$

eftersom Δx^2 är ännu mycket mindre om nu Δx redan är mycket litet. Alltså har vi kommit fram till att om $h(x) = f(x)g(x)$ har en derivata i punkten $x = a$ så skulle den derivatan ges av

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Med hjälp av definitionen av derivata kommer man att kunna bevisa att detta faktiskt är helt korrekt, och kallas *produktregeln* eller *Leibniz regel*.

Feluppskattning

Om vi har mätt upp en storhet x med ett mätfel Δx men egentligen vill ha reda på $y = f(x)$ kan vi med hjälp av derivatan som en linjäroximation se att mätfelet fortplantas till ett fel i y som ges av

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

vilket ger

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Vi kan alltså se att $f'(x)$ talar om hur mycket felet förstoras eller förminskas när vi räknar ut y från det uppmätta värdet x .

Derivatans definition

När vi har de här två tolkningarna kan vi se hur man skulle kunna finna en mer formell och hållbar definition av vad som menas med derivata. Om vi tänker oss den första definitionen kan vi dra en linje genom punkterna $(a, f(a))$ och $(a + h, f(a + h))$ och se på lutningen av denna. När h närmar sig noll ska lutningen på linjen närma sig tangentens lutning. Vi har ett striktare matematiskt begrepp som motsvarar att närma sig och som vi kallar *gränsvärde*. Vi ska inte gå mer in på definitionen av detta eftersom det kommer att studeras ingående i nästa kurs. Tanken är att vi bara vi går tillräckligt nära punkten är säkra på att vi ligger mycket nära gränsvärdet. Vi får alltså

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Sats 1 (Produktregeln) Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara är också produkten $h(x) = f(x)g(x)$ deriverbar med derivata

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Övning 1 Använd produktregeln för att bestämma derivatan av en produkt av tre funktioner $f(x)g(x)h(x)$.

Central differenskvot

Ibland kan det vara lättare att hantera den centrala differenskvoten

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{(a+h) - (a-h)} = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Däremot kan det hända att gränsvärdet för denna existerar utan att den vanliga differenskvoten har något gränsvärde. Ett enkelt exempel på detta är när $f(x) = |x|$, dvs $f(x) = x$, för $x \geq 0$ och $f(x) = -x$ då $x < 0$. Då blir den centrala differenskvoten för $a = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0-h)}{(0+h) - (0-h)} = \frac{h - h}{2h} = 0$$

för alla $h > 0$, medan den vanliga differenskvoten blir -1 för negativa h och $+1$ för positiva h .

Derivatan av sammansättning av funktioner – kedjeregeln

Sats 2 (Kedjeregeln) Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara så är sammansättningen $h(x) = f(g(x))$ deriverbar med derivata

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Genom att använda kedjeregeln på funktionerna $g(x)$ och $f(x) = 1/x$ kan vi beräkna derivatan av $1/g(x) = f(g(x))$ som

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = f'(g(x))g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

eftersom derivatan av $f(x) = 1/x = x^{-1}$ är $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -1/x^2$. Använder vi sedan produktregeln kan vi derivera en kvot av funktioner genom.

Sats 3 (Kvotregeln) Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara är kvoten $h(x) = f(x)/g(x)$ deriverbar där $g(x) \neq 0$, med derivata

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Övning 2 Bevisa kvotregeln genom att använda produktregeln på funktionen

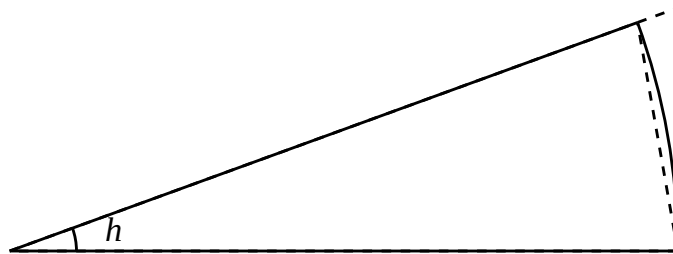
$$h(x) = f(x) \cdot (1/g(x)).$$

Derivatans av trigonometriska funktionerna

För att se hur derivatorna av de trigonometriska funktionerna ser ut börjar vi med att derivera $\sin x$ i punkten $x = 0$. Alltså är vi intresserade av gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$$

då h går mot noll. Vi kan anta att $h > 0$ eftersom både täljare och nämnare byter tecken då h byter tecken. Betrakta nedanstående figur där vi har en cirkelsektor med öppningsvinkel h och med radie 1. Cirkelsektorn innehåller triangeln med hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(\cos h, \sin h)$, men den ligger inuti triangeln med hörn $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, \tan h)$. Här kommer det att vara viktigt att komma ihåg att vi räknar i radianer.



Vi kan se att arean av cirkelsektorn måste ligga inklämd mellan areorna av trianglarna och vi får olikheterna

$$\frac{1}{2} \sin h < \frac{h}{2} < \frac{1}{2} \tan h.$$

Den första olikheten kan skrivas om som

$$\frac{\sin h}{h} < 1$$

genom att dela med $h/2$ och den andra kan skrivas om som

$$\cos h < \frac{\sin h}{h}.$$

genom att dela med $h/2$ och multiplicera med $\cos h$. Alltså måste vi ha vår differenskvot inklämd som

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

för alla h som ligger mellan 0 och $\pi/2$.

Eftersom

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

måste även gränsvärdet för $\sin h/h$ då h går mot noll finnas och vara lika med 1. Vi har alltså kommit fram till att $\sin x$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och att derivatan är $\sin' 0 = 1$,

Vi kan också använda definitionen av derivata för att beräkna derivatan av $\cos x$ då $x = 0$. Vi har då differenskvoten

$$\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \cdot \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}.$$

Vi ser att beloppet av denna differenskvot är mindre än $\sin h$ eftersom vi redan sett att $\sin h/h < 1$. Alltså måste gränsvärdet av kvoten existera och vara lika med 0 och vi har att $\cos'(0) = 0$. (Ett annat sätt att se detta är att funktionen $\cos x$ har ett maximum i $x = 0$.)

När vi nu väl känner till derivatorna av $\sin x$ och $\cos x$ i punkten $x = 0$. För att få derivatorna i andra punkter kan vi använda additionssatserna

$$\sin(a + x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$$

Därmed får vi att

$$\sin'(a) = \sin a \cos' 0 + \cos a \sin' 0 = \cos a$$

och eftersom

$$\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$$

får vi också att

$$\cos'(a) = \cos a \cos' 0 - \sin a \sin' 0 = -\sin a.$$

Här har vi använt *linjäritet*, dvs att om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara med derivator $f'(a)$ och $g'(a)$ i punkten $x = a$ så är också

$$h(x) = Af(x) + Bg(x)$$

deriverbar i $x = a$ med derivata

$$h'(a) = Af'(a) + Bg'(a).$$

Det är klart att vi kan kontrollera linjäritet antingen genom den strikta definitionen av derivatan, eller genom att betrakta linjära approximationer. Det kommer också att bli klart i nästa kurs att vi kan göra dessa linjära approximationer lika rigorösa som definitionen med gränsvärden.

Sats 4 (Derivator av de trigonometriska funktionerna) *Funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$ är deriverbara överallt där de är definierade och derivatorna ges av*

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{och} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Övning 3 Använd kvotregeln för att bevisa påståendet om derivatan för $\tan x$.

Övning 4 Använd central differenskvot för att härleda derivatan av $\tan x$. (Obs! Det fungerar för att vi redan vet att $\tan x$ är deriverbar där den är definierad.)

Övning 5 Använd linjär approximation för att komma fram till formeln för derivatan av en kvot, $h(x) = f(x)/g(x)$.

Att arbeta med

Nästa kontrollskrivning kommer först efter den fjärde veckan då vi också hållit på en del med tillämpningar av derivator. Under den här veckan är det lämpligt att börja arbeta mer med inlämningsuppgiften och skjuta upp att arbeta med problemen från kontrollskrivningar och tentamina tills nästa vecka.

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina.

Övning 3.1 Låt $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2 \cos x + 1)^4$, för alla reella tal x .

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f . (3)

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. (4)

c) Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal. (2)

Övning 3.2 Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av $f(x)$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (3)

b) Skissera grafen för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ och bestäm maximum och minimum av $f(x)$ på samma intervall. (4)

c) Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en *differentialekvation*

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b . (2)

Övning 3.3 Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2 \cos^2 x$.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. (3)

b) Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ med två gällande siffror. (4)

c) Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$. (2)

Övning 3.4 Betrakta funktionen $f(x) = x(3 - x)e^{-x/2}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. (4)

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. (5)

Övning 3.5 Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.

- a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. (4)
- b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. (5)

Övning 3.6

- a) Derivera funktionen $f(x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.) (2)
- b) Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$. (2)
- c) Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax} \sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$. (5)

Övning 3.7

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen $g(x) = 2x^3 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $g(x)$ på samma intervall. Ange svaren exakt. (4)
- c) Använd Newton-Raphsons metod med startvärde $x = 0$ för att finna ett närmevärde till den enda reella lösningen till ekvationen

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Utför två iterationer och gör en uppskattning av felet. (2)

Övning 3.8

- a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Härled derivatan av $\tan x$ direkt från definitionen av derivata. (Ledning: Använd att $(\sin x)/x$ går mot 1 när x går mot noll.) (2)

Övning 3.9

- a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{2 + x}{5 + x^2}$$

på intervallet $-5 \leq x \leq 5$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Visa direkt från definitionen av derivata att en exponentialfunktion, $h(x)$, uppfyller

$$h'(x) = h(x) \frac{h'(0)}{h(0)}.$$

(2)

Övning 3.10

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x} \cos(x)}$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde till nollstället till funktionen $f(x) = \sin(x) + x - 1$. Utför två iterationer med startvärde $x = 0$. och ange nollstället med korrekt antal gällande siffror. (4)

- c) Härled formeln för derivatan av en produkt av två deriverbara funktioner. (2)

Övning 3.11

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \ln x \sin^2 x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Om man behöver beräkna $\sqrt{57}$ med en miniräknare som saknar kvadratrotsfunktion kan man använda Newton-Raphsons metod. Använd den för att beräkna ett närmevärde med tre gällande siffrors noggrannhet utgående från startvärdet $x_0 = 7$. (2)

Övning 3.12

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

och ange tydligt vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

på intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Ange svaren exakt. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$4 \sin x = x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Gör två iterationer från startvärdet $x_0 = \pi$. (2)

Övning 3.13

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \cos(x)$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) För att bestämma maximum för funktionen $h(x) = e^{-at} \sin(\omega t)$ för $t > 0$ vill man hitta det första nollstället för derivatan, $h'(x)$. En första gissning är $t = \pi/2\omega$, eftersom sinusfunktionen har sitt maximum i den punkten. Använd Newton-Raphsons metod för att förbättra denna gissning. (2)

Övning 3.14

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{2 \cos x}{1 + 2 \cos^2 x}$$

ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(t) = \frac{2t}{1 + 2t^2}$$

på intervallet $-1 \leq t \leq 1$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Visa med hjälp av derivatans definition att $\cos x$ är deriverbar i $x = 0$ och att derivatan är lika med 0 i samma punkt. (2)

Övning 3.15

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = (1 + \sin^2 x)(2 + \cos^2 x)$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. Förenkla uttrycket så långt det går (4)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (5)

Övning 3.16

- a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \tan x, \quad 0 < x < \pi/2.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = x^3 - 3x + 1$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaren på exakt form. (3)

- c) Använd Newton-Raphsons metod för att finna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$x^3 + 1 = 3x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x_0 = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta noggrannheten i svaret. (3)

Övning 3.17

- a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(t) = \sin^3 t + 3 \frac{\cos t}{\cos 3t}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och minsta värde funktionen

$$g(x) = 3 \sin^3 t + 4 \cos^3 t$$

antar på intervallet $0 \leq t \leq \pi/3$. Ange svaret med tre gällande siffrors noggrannhet och skissera grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Det finns en växande deriverbar funktion $f(x)$ som är definierad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och som uppfyller

$$\sin(f(x)) = x$$

för alla $-1 \leq x \leq 1$. Använd kedjeregeln för att beräkna derivatan för $f(x)$. (2)

Övning 3.18

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$g(t) = 4 \sin^3 t + 3 \cos t$$

på intervallet $0 \leq t \leq \pi$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde för den lösning till ekvationen $x^4 + 2x = 1$ som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta också felet i svaret. (2)

Facit

Övning 3.1 (5B1134:Modelltentamen:3)

- $f'(x) = -8 \sin x (2 \cos x + 1)^3$.
- Maximum är 1 och minimum är 0.
- Genom att se på nollställena till $g'(x)$ och $g(x)$, samt ändpunkterna på intervallet.

Övning 3.2 (5B1134:KS:3:2003)

- $f'(x) = 2e^{-x} \cos x$.
- Maximum är $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0, 21$ och minimum är $f(0) = -1$.
- Konstanterna ges av $a = b = 2$ och $y = f(x)$ är en lösning till $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Övning 3.3 (5B1134:Tentamen:031013:3)

- Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = \cos x - 4 \cos x \sin x$.
- Maximum av $f(x)$ är 2, 1 och minimum $-1, 0$, på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.
- De exakta värdena för maximum och minimum är $17/8$, respektive -1 .

Övning 3.4 (5B1134:Tentamen:031103:3)

- Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.
- Maximum av $f(x)$ är $2e^{-1/2} \approx 1, 2$ och minimum är $-18e^{-3} \approx -0, 90$.

Övning 3.5 (5B1134:Tentamen:040109:3)

- Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.
- Maximum av $f(x)$ är $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0, 29$ och minimum är $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0, 85$.

Övning 3.6 (5B1134:Tentamen:040821:3)

- Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = -32 \cos^3 x \sin x + 16 \cos x \sin x$.
- Derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -2 \sin 2x \sin 3x + 3 \cos 2x \cos 3x$.
- Funktionen har ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$ om $a = -2/\sqrt{3}$.

Övning 3.7 (5B1134:KS3:2004)

- Derivatan är $f'(x) = (\sin 2x)/x^2 - 2(\sin^2 x)/x^3$.
- Funktionens största värdet är 2 och dess minsta värde är $2 - \sqrt{2}$.
- Lösningen är $x = -0, 32222$ med ett fel av storlek $4 \cdot 10^{-5}$.

Övning 3.8 (5B1134:Tentamen:041011:3)

- Derivatan är $f'(x) = 8/(e^{2x} + e^{-2x})^2$.
- Det största värdet är $\sqrt{3}/3$ och det minsta är $-\sqrt{3}/3$.
- Derivatan av $\tan(x)$ är $1/\cos^2(x)$.

Övning 3.9 (5B1134:Tentamen:041030:3)

- Derivatan är $f'(x) = 2/(1 + \sin 2x)$.
- Det största värdet är $1/2$ och det minsta värdet är $-1/10$.

Övning 3.10 (5B1134:Tentamen:050112:3)

- Derivatan är $f'(x) = (2 \cos x + \sin x)/(2\sqrt{1 - e^{-2x} \cos x})$.
- Nollstället är $x = 0, 51$ med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 3.11 (5B1134:Tentamen:050829:3)

- $f'(x) = (1/x) \sin^2 x + 2 \ln x \sin x \cos x$.
- Maximum ges av $g(3) = 26/9$ och minimum av $g(1) = 2$.
- $x = 7, 55$ är en approximation av $\sqrt{57}$ med tre gällande siffror.

Övning 3.12 (5B1134:KS3:2005)

- $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$.
- Maximum är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ och minimum $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.
- Två steg med Newton-Raphsons metod ger närmevärdet $x = 2, 47$ (med tre gällande siffror).

Övning 3.13 (5B1134:Tentamen:051017:3)

- $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}(\cos x/(2\sqrt{x}) + \sin x)$.
- Maximum är $g(2/5) = 8\sqrt{10}/125$ och minimum är $g(1) = -1$.
- Den förbättrade gissningen är $t_1 = \pi/(2\omega) + a/(a^2 - \omega^2)$.

Övning 3.14 (5B1134:Tentamen:051024:3)

- Derivatan är $f'(x) = 2 \sin x (2 \cos^2 x - 1)/(1 + 2 \cos^2 x)^2$.
- Funktionens maximum är $f(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$ och dess minimum är $f(-1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2$.

Övning 3.15 (5B1134:Tentamen:060113:3)

- $f'(x) = 4 \sin x \cos^3 x$.
- Maximum är $f(2) = 5/3 \approx 1, 67$ och minimum $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0, 83$.

Övning 3.16 (5B1134:KS3:2006)

- $f'(x) = (2\sqrt{x} - \cos^2 x \tan x)e^{-\sqrt{x}}/(2\sqrt{x} \cos^2 x)$.
- Funktionens maximum är 3 och dess minimum är -1 på intervallet $0 \leq x \leq 2$.
- Efter två iterationer får vi $x_2 = 0, 3472$ som är ett närmevärde med en noggrannhet på 0, 0001.

Övning 3.17 (5B1134:Tentamen:061016:3)

- $f'(t) = 3 \sin^2 t \cos t - (3 \sin t \cos 3t - 9 \cos t \sin 3t)/\cos^2 3t$.
- Funktionens maximum är 4, 00 och dess minimum är 2, 40.
- $f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Övning 3.18 (5B1134:Tentamen:070116:3)

- $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$.
- Funktionens maximum är 4, 38 och dess minimum är $-3, 00$.
- Ett närmevärde efter två iterationer ges av $x_2 = 19/40 = 0, 475$ och felet i detta c:a $4 \cdot 10^{-4}$.