

SF1620 Matematik och modeller

2007-09-24

4 Fjärde veckan — Derivator med tillämpningar

Optimering och extremvärden

Optimering handlar om att göra något så bra som möjligt under givna villkor. Ofta kan det formuleras som att man vill hitta ett största eller minsta värde för en funktion och det värde på variabeln som ger detta värde. Vi kallar detta för att söka *extremvärden* för funktioner.

Om en funktion är deriverbar och har ett lokalt maximum eller minimum måste derivatan i den punkten vara noll eftersom tangenten till grafen i den punkten måste vara horisontell. För att hitta kandidater till lokala extrempunkter till funktionen $f(x)$ kan vi lösa ekvationen

$$f'(x) = 0.$$

Om vi söker maximum eller minimum på ett intervall, $a \leq x \leq b$, måste vi också kontrollera intervalllets ändpunkter, a och b , samt punkter där derivatan inte existerar. Exempelvis har funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ sitt maximum i $x = 1$ utan att derivatan av funktionen är noll där. Om vi ser på funktionen $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ så har den sitt minimum då $x = 0$, men funktionen är inte deriverbar i den punkten.

Numerisk ekvationslösning

När vi söker efter ett extremvärde till en funktion behöver vi lösa en ekvation av typen

$$f(x) = 0$$

där $f(x)$ är derivatan av den funktion vi studerar. Ofta kan vi inte lösa ekvationen *analytiskt* och då behöver vi *numerisk metod* som hjälper oss att finna ett närmevärde till lösningen. Ett exempel på numerisk metod är *Newton-Raphsons metod*.

Idén till Newton-Raphsons metod är att vi approximerar funktionen med en linjär funktion med hjälp av derivatan. Det betyder att vi i närheten av punkten $x = x_0$ skriver

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vi försöker sedan lösa ekvationen

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

och får

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Om x_0 är vår första gissning kan vi låta

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

vara en förbättrad gissning. Vi kan sedan upprepa proceduren och successivt få bättre och bättre uppskattningar av den verkliga lösningen genom

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \\x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \\x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)},\end{aligned}$$

och så vidare. Den korrigering vi gör i varje steg kan ses som en uppskattning av hur långt den förra approximationen låg från den verkliga lösningen.

Vi ser på exemplet $F(x) = x^3 + x^2 - x$ där de två nollställena till derivatan $f(x) = F'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ motsvarar lokala extrempunkter i $x = -1$ och $x = 1/3$. Vi börjar med $x_0 = 0$ och får då

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{3x_0^2 + 2x_0 - 1}{6x_0 + 2} = 0 - \frac{3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{6 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

När vi går vidare och korregerar x_1 får vi

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{3x_1^2 + 2x_1 - 1}{6x_1 + 2} = 0,5 - \frac{3 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 - 1}{6 \cdot 0,5 + 2} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

och

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{3x_2^2 + 2x_2 - 1}{6x_2 + 2} = 0,35 - \frac{3 \cdot 0,35^2 + 2 \cdot 0,35 - 1}{6 \cdot 0,35 + 2} \approx 0,3335.$$

Felet i den senaste approximationen kan vi uppskatta till

$$\Delta x \approx \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx \frac{3 \cdot 0,3335^2 + 2 \cdot 0,3335 - 1}{6 \cdot 0,3335 + 2} \approx 0,0002.$$

Eftersom vi i det här fallet känner till att den exakta lösningen är $x = 1/3$ kan vi kontrollera att det verkliga felet är

$$x_3 - 1/3 \approx 0,0002.$$