Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösning till tentamen i SF1625 Envariabelanalys för E, 07–12–17, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 25–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 p ger betyget D och 14–16 p ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.
- För äldre teknolger ges betygen 5, 4, 3, K (eller U) med krav som för A, B/C, D/E respektive Fx.

1. Låt $f(x) = xe^{-1/x}$ då $x \neq 0$. Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, samt bestäm eventuella sneda asymptoter då $x \to \pm\infty$. Använd sedan dessa resultat för att skissera funktionens graf. (3p)

   Lösning:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{-1/x} = \left\{ \frac{1}{x} = t \to \infty \right\} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} e^{-t}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t \cdot e^t} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{-1/x} = \left\{ -\frac{1}{x} = t \to \infty \right\} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} e^{t}$$
$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = -\infty.$$

$y = kx + \ell$ = sned asymptot $\iff$ $k = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)/x)$ och $\ell = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$ finns. Här är

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1, \\
\ell &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \left(e^{-1/x} - 1\right) = \{t = -1/x \to 0\} \\
&= -\lim_{t\to 0} \frac{(e^t - 1)}{t} = -1.
\end{aligned}
$$

Alltså är $y = x - 1$ en sned asymptot då $x \to \pm\infty$. Med hjälp av asymptoten och gränsvärdena ovan är det sedan lätt att skissera kurvan.

2. Visa att $\ln x \leq x - 1$ då $x > 0$. (3p)

   Lösning: Sätt $f(x) = \ln x - x + 1$ då $x > 0$ och visa att $f(x) \leq 0$. Det är klart att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$ och $x \to \infty$. Eftersom

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

   är $f'(x) > 0$ då $0 < x < 1$ och $f'(x) < 0$ då $x > 1$, så att $f(x)$ är växande då $0 < x < 1$ och avtagande då $x > 1$. Härav följer att

$$f_{\max} = f(1) = 0 - 1 + 1 = 0,$$

   så $f(x) \leq 0$ för alla $x > 0$.

3. Beräkna

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx. \qquad \text{(3p)}$$

   Lösning:

$$
\begin{aligned}
&\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \, \cos x \, dx \\
&= \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^2 x \, \cos x \, dx = \{u = \sin x \implies du = \cos x \, dx\} \\
&= \int \left(u^2 - u^4\right) \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.
\end{aligned}
$$

4. Visa att

$$\left| e^{-x^2} - 1 + x^2 \right| \leq \frac{x^4}{2}$$

för alla x. (3p)

Lösning:

$$f(t) = e^t \Longrightarrow f^{(n)}(t) = e^t \text{ för alla } n \geq 0 \Longrightarrow$$
$$e^t = 1 + t + \frac{e^c}{2}\, t^2 \text{ för något } c \text{ mellan } 0 \text{ och } t.$$

Då $t = -x^2$ fås

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{e^c}{2}\, x^4 \Longrightarrow \left| e^{-x^2} - 1 + x^2 \right| \leq \frac{e^c}{2}\, x^4$$

för något c mellan 0 och $-x^2$. $c \leq 0 \Longrightarrow e^c \leq 1 \Longrightarrow$

$$\left| e^{-x^2} - 1 + x^2 \right| \leq \frac{x^4}{2} \quad \text{för alla } x.$$

5. Visa att

$$y = \sinh x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

har en invers på intervallet $(-\infty, \infty)$, samt beräkna denna.

LEDNING: Om $y = (e^x - e^{-x})/2$ multipliceras med e^x så fås en andragradsekvation med avseende på e^x. (4p)

Lösning:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) > 0 \text{ för alla } x \Longrightarrow y \text{ är växande}$$
$$\Longrightarrow \text{ inversen finns.}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff e^x - 2y - e^{-x} = 0$$
$$\iff (e^x)^2 - 2y\, e^x - 1 = 0 \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Eftersom $e^x > 0$ är $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Så inversfunktionen $y = \sinh^{-1}(x)$ blir lika med $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

6. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' + 4y = \sin 2x. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Homogena ekvationen $y'' + 4y = 0 \Longrightarrow$ karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0 \iff r = \pm 2i \Longrightarrow y_{\text{hom}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Eftersom $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$ kan ekvationen skrivas som $y'' + 4y = \operatorname{Im} e^{2ix}$. Så $z(x)$ lösning till $z'' + 4z = e^{2ix} \Longrightarrow \operatorname{Im} z(x) =$ lösning till $y'' + 4y = \sin 2x$.

Ansatsen $z(x) = u(x)\, e^{2ix}$ ger

$$\begin{aligned}
&z' = u'\, e^{2ix} + 2iu\, e^{2ix},\\
&z'' = u''\, e^{2ix} + 4iu'\, e^{2ix} - 4u\, e^{2ix} \Longrightarrow\\
&e^{2ix}(u'' + 4i\, u' - 4u + 4u) = e^{2ix}\\
&\iff u'' + 4iu' = 1.
\end{aligned}$$

Den sista ekvationen uppfylls med

$$u' = \frac{1}{4i} \Longrightarrow u = \frac{x}{4i},$$

så

$$\begin{aligned}
&z_{\text{p}}(x) = \frac{x}{4i} e^{2ix} \text{ är en partikulärlösning till } z'' + 4z = e^{2ix} \Longrightarrow\\
&y_{\text{p}}(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{x}{4i}(\cos 2x + i\sin 2x)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-ix}{4}\cos 2x + \frac{x}{4}\sin 2x\right)\\
&= -\frac{x}{4}\cos 2x \text{ är en partikulärlösning till } y'' + 4y = \sin 2x.
\end{aligned}$$

Så svaret blir

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{p}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

7. Beräkna integralen

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x}\, dx.$$

LEDNING: Substitutionen $u = \tan x/2 \Longrightarrow$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{och} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

vad dx blir får du fundera ut själv. (4p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
&u = \tan x/2 \implies x = 2\arctan u \implies dx = \frac{2\,du}{1+u^2} \implies \\
&I = \int_{u=0}^{1} \frac{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}{2-\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2}{2+2u^2-2u} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{(u^2-u+1)(u^2+1)}\,du.
\end{aligned}$$

Partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(u^2-u+1)(u^2+1)} = \frac{Au+B}{u^2-u+1} + \frac{Cu+D}{u^2+1} \implies \\
&1 = (Au+B)(u^2+1) + (Cu+D)(u^2-u+1) = \\
&= u^3(A+C) + u^2(B+D-C) + u(A-D+C) + B + D \\
&\implies \begin{cases} A+C=0 & (1) \\ B+D-C=0 & (2) \\ A-D+C=0 & (3) \\ B+D=1. & (4) \end{cases}
\end{aligned}$$

$(4)-(2) \implies C=1$, $(1)-(3) \implies D=0$, $(1) \implies A=-C=-1$, $(4) \implies B = 1-D = 1 \implies$

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^1 \left(\frac{-u+1}{u^2-u+1} + \frac{u}{u^2+1} \right) du \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{u^2-u+1} + \frac{2u}{u^2+1} \right) du
\end{aligned}$$

där mittentermen är

$$= \frac{1}{(u-1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Därmed blir

$$\begin{aligned}
I &= \left[-\ln(u^2-u+1)+\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+\ln(u^2+1)\right]_0^1 \\
&= -0+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}+\ln 2-\left(0-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)-0\right) \\
&= \ln 2+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

LEDNING: Gör liknämnigt först! (4p)

Lösning:

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x},$$

där

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5)\right)=x^2-\frac{2}{6}x^4+\mathcal{O}(x^6).$$

Alltså är

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x^2+\frac{1}{3}x^4+\mathcal{O}(x^6)}{x^4+\mathcal{O}(x^6)}=\frac{\frac{1}{3}+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x^2)}\to\frac{1}{3}\quad\text{då } x\to 0.$$