Svar och lösningar till tentamen kurs SF1626 Flervariabelanalys för IT1 och ME1, torsdagen den 21 augusti 2008 klo. 14 – 19. Även för kurserna SF1655 och 5B1148, TEN1.

1.) Försök lösa den endimensionella vågekvationen $9\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ genom att pröva de nya koordinaterna $x + 3t$ och $x - 3t$.

—-

Detta är standard och står i lärobok. Med $u = x+3t$ och $v = x-3t$, $g(u, v) = f(x, t)$ och beteckningen $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ fås den nya ekvationen $0 = 9f_{xx} - f_{tt} = \cdots = 36\, g_{uv}$, varav $g = h(u) + k(v)$, där h och k är godtyckliga funktioner, och så lösningen $f(x, t) = g = h + k = h(x + 3t) + k(x - 3t)$.

2.) Givet ytan $S : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 9$. Låt Q vara punkten $(6, -4, 5)$. Avgör huruvida x lokalt nära Q längs S kan lösas ut som en funktion av de övriga variablerna, samt beräkna i så fall de partiella derivatorna av denna funktion uti punkten Q .

—-

Implicita funktionssatsen (IFS) kan användas. Här gör vi det *direkt* och *utan* IFS. Vi löser ut x till $x = h(y, z) = \pm 3\sqrt{9 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25}}$, där vi väljer plustecknet, så att $h(-4, 5) = 6$. Nu är det lätt att beräkna h_y och h_z i punkten $(y, z) = (-4, 5)$.

3.) Låt talen a, b och c vara positiva. Låt D betyda hela x, y-planet. Beräkna integralen $\displaystyle\iint_D \frac{dx\, dy}{(\, a + b^2x^2 + c^2y^2\,)^2}$.

—-

Koordinatbytena $u = b\,x$ och $v = c\,y$ förenklar integralen. Nu införs polära koordinater (r, θ) enligt $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$. Integranden blir då oberoende av θ , så att integreringen över θ direkt ger en faktor 2π . Kvar blir $\displaystyle\frac{2\pi}{bc}\int_0^\infty \frac{r}{(\, a + r^2\,)^2}\, dr =$ $= \cdots = \frac{\pi}{abc}$.

4.) Låt T vara triangeln i planet med hörn i punkterna $(2, 0)$, $(0, 1)$ och $(-1, -1)$. Låt Γ vara den slutna kurva som triangelns rand bildar. Utvärdera kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)(x\, dx + y\, dy)$, där som vanligt $r^2 = x^2 + y^2$.

—-

Vi orienterar kurvan Γ i positiv led. Greens sats kan användas för att ändra kontur till enhetscirkeln $C : x^2 + y^2 = 1$, där vi ser att integranden blir noll. (Vi kan byta kontur från Γ till C *utan* att komma i närheten av origo, där ju integranden *ej* är definierad.) Svaret blir noll.

5.) Bestäm alla värden som antages av funktionen $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} - 2}{x^2 + y^2 + 4y + 9}$ för alla reella x och y .

—-

Efter kvadratkomplettering kan vi skriva $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} - 2}{x^2 + (y + 2)^2 + 5}$, varför vi inför nya koordinater $u = x$, $v = y+2$, och därefter polära koordinater $(r\,,\,\theta)$ enligt $x = u = r\,\cos\theta\,,\; y+2 = v = r\,\sin\theta$. Då blir $f = \cdots = \dfrac{r-2}{r^2+5} = g(r)\,, r \geq 0$. Denna kontinuerliga funktion g undersöks lätt. Man finner att $m = \min g = g(0) = = -2/5\,,\; M = \max g = g(5) = 1/10$. Funktionen f antager därför *alla värden* mellan m och M , inklusive m och M .

6.) Vid tillverkning av en pappersmugg vill man minimera pappersåtgången för given volym vätska. Muggen skall vara cylindrisk med en rund bottenskiva. Hur hög skall muggen göras i förhållande till bottenskivans storlek?

—-

Ett klassiskt minimeringsproblem med eller utan Lagrangemultiplikatorer. Står i lärobok. Svar: Cylinderns höjd skall vara lika med dess radie.

7.) a) Låt Ω betyda hela xy-planet $\mathbf{R}^2$. Utvärdera integralen (integralerna)

$$J = \iint_\Omega (x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy + i\iint_\Omega 2xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\ .$$

b) Avgör huruvida J kan skrivas på formen $J = \iint_{\mathbf{C}} z^2\,\mathrm{e}^{-|z|^2}\,dx\,dy$, där den komplexa variabeln $z = x+iy$ genomlöper hela det komplexa talplanet $\mathbf{C}$.

—-

a) Med vanliga polära koordinater $x = r\,\cos\theta\,,\; y = r\,\sin\theta$ fås

$$J = K\int_0^{2\pi} (\,\cos^2\theta - \sin^2\theta\,)\,d\theta + iK\int_0^{2\pi} 2\,\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,,$$

där den radiella integralen (som *ej* behöver beräknas) är $K = \int_0^\infty r^3\,\mathrm{e}^{-r^2}\,dr$. De båda $\theta-$integralerna blir nämligen noll. Svar: $J = 0$.

b) Svaret är ja, eftersom $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i2xy$, och $|z|^2 = x^2+y^2$.

8.) Givet funktionen $f(x,y) = \dfrac{1+\cos(\pi\sqrt{x^2+y^2}\,)}{\left\{\,\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2}\,)\,\right\}^2}$. Avgör hur funktionen uppför sig nära enhetscirkeln C . Kan den göras kontinuerlig i en omgivning av C ? Kan den ha ett lokalt maximum eller minimum på C ?

—-

Inför polära koordinater som i föregående uppgift. Då fås $f = \dfrac{1+\cos(\pi r\,)}{\left\{\,\sin(\pi r\,)\,\right\}^2} = g(r)$.

Enhetscirkeln $C : x^2+y^2 = 1$ motsvaras av $r = 1$, vilket betyder *små* värden för t , om vi skriver $\pi r = \pi + t$. För små t får vi nu

$$f = \frac{1+\cos(\pi+t\,)}{\left\{\,\sin(\pi+t\,)\,\right\}^2} = \frac{1-\cos t}{\left\{\,-\,\sin t\,\right\}^2} = \frac{1-\cos t}{\sin^2 t} = \cdots = \frac{1}{2\left(\,\cos\frac{t}{2}\right)^2} =$$

$$= \{\text{Maclaurin}\} = \frac{1}{2\left(\,1-\frac{1}{2}(\frac{t}{2})^2+\cdots\,\right)^2} = \frac{1}{2\left(\,1-(\frac{t}{2})^2+\cdots\,\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\,1+(t/2)^2+\cdots\,\right) = \frac{1}{2}+\frac{t^2}{8}+\cdots = \frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}(r-1)^2+\cdots\ .$$

Detta visar att funktionen $g(r)$ kan utvidgas till en kontinuerlig funktion för r nära 1, där den har ett lokalt minimum. Därför kan funktionen f utvidgas till en kontinuerlig funktion nära enhetscirkeln C . På C får då f värdet $1/2$, som blir ett lokalt minimum för f nära C .