

Uppgift 4,4.22:

Visa att $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \& \neg B$.

Vi delar upp uppgiften i två separata som sedan kan sättas samman:

1) Visa $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$

2) Visa $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$.

Uppgift 1) Idén är följande:

(1)	$\neg(A \rightarrow B)$	premiss
(2)	$\left[B \right.$	antagande
$\vdots$	$\vdots$	
(5)	$\left[\perp \right.$	
(6)	$\neg B$	2,5 $\sim I$

Så här ser hela beviset ut:

1	(1)	$\neg(A \rightarrow B)$	premiss
2	(2)	$\left[B \right.$	antagande
3	(3)	$\left[A \right.$	antagande
2,3	(4)	$A \rightarrow B$	3,2 $\rightarrow I$
1,2	(5)	$\left[\perp \right.$	1,4 $\sim E$
1	(6)	$\neg B$	2,5 $\sim I$

Rad 3 och 4 kan behövas en förklaring.
Normalt sett, för att visa $A \rightarrow B$, ska man anta A , starta en hake, härleda B , avsluta haken och dra slutsatsen att $A \rightarrow B$. Men här vet vi ju redan B , så haken sluts direkt!

Uppgift 2)

Idén är följande:

- (1) $\sim(A \rightarrow B)$ premiss
- (2) $\left[\begin{array}{l} \sim A \\ \vdots \\ \perp \end{array} \right]$ antagande
- (3) $\vdots$
- (9) $\left[\begin{array}{l} \vdots \\ \perp \end{array} \right]$
- (10) $\sim\sim A$ $\sim I$
- (11) A DN

Frågan är hur man härleder motsägelse mellan rad 3 och . Jo, försök härleda $A \rightarrow B$ vilket tillsammans med rad 1 ger $\perp$. På rad 3 ska vi alltså anta A , med en ny hake, för målet att härleda B :

- (1) $\sim(A \rightarrow B)$
- (2) $\left[\begin{array}{l} \sim A \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \end{array} \right] \\ A \rightarrow B \\ \perp \end{array} \right]$
- (3) $\vdots$
- (7) $\left[\begin{array}{l} \vdots \\ B \end{array} \right]$
- (8) $A \rightarrow B$
- (9) $\perp$
- (10) $\sim\sim A$
- (11) A

Det är viktigt att man inte härleder motsägelse direkt från rad 3, för denna motsägelse kan inte användas i stället för motsägelsen på rad 9; den "hör till en annan hake".

Hela beviset:

1	(1)	$\sim(A \rightarrow B)$	premiss
2	(2)	$\sim A$	antagande
3	(3)	A	antagande
4	(4)	$\sim B$	antagande
2,3	(5)	$\perp$	2,3 $\sim E$
2,3	(6)	$\sim\sim B$	4,5 $\sim I$
2,3	(7)	B	6 DN
2	(8)	$A \rightarrow B$	3,7 $\rightarrow I$
1,2	(9)	$\perp$	1,8 $\sim E$
1	(10)	$\sim\sim A$	2,9 $\sim I$
1	(11)	A	10 DN

Hela uppgiften, att visa att $\sim(A \rightarrow B) \vdash A \& \sim B$,
görs genom att skriva dessa bevis efter
varandra (men bara en premiss) och se
göra $\&I$. Detta lämnas som en övning.