

Tentamen i SF1642, LOGIK för IT och D
Onsdagen den 19 december 2007

Skrivtid: 14.00–19.00.

Ansvarig lärare: Andreas Enblom, tel 790 7208.

Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.

Uppgifter: Varje uppgift ger högst 2 poäng. Lösningarna måste vara ordentligt motiverade.

Betygsgränser: E: Minst 13 poäng
D: Minst 15 poäng
C: Minst 17 poäng varav minst 1 på del 3
B: Minst 19 poäng varav minst 3 på del 3
A: Minst 21 poäng varav minst 5 på del 3

Bonuspoäng: Problemlösningstester (PL) eller kontrollskrivningar (KS) från högst en av höstterminen 2007 och vårterminen 2007 kan tillgodoräknas. Den som klarat PL/KS nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och ska inte göra dem). Ange på omslaget vilka PL/KS du klarat.

Komplettering: Den som får 11 eller 12 poäng får betyget Fx och kan få delta i en kompletteringsskrivning för att bli godkänd på kursen. Mer information om detta kommer på kurshemsidan. Ange din e-postadress på omslaget så får du besked om detta gäller dig.

DEL 1 – Här används eventuella bonuspoäng

1. På den fjärran Knarrön (där ju var och en antingen är kung och alltid talar sanning, eller narr och alltid ljuger) möter vi öborna A, B och C.

A säger: ”Jag är kung om C är det.”

B säger: ”Om jag är kung så är C också det men inte A.”

Går det att avgöra vad B är?

2. Visa med naturlig deduktion att

$$(A \rightarrow B) \vee \sim\sim D, (C \rightarrow B) \rightarrow D, C \rightarrow A \vdash D.$$

3. Avgör med tablåmetoden om

$$\exists x (Fx \rightarrow Gx), \forall x (Gx \rightarrow Hx) \models \forall x (Fx \rightarrow Hx).$$

Om det inte gäller, hitta en tolkning som visar detta.

4. Visa med naturlig deduktion

$$\forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \sim Qx) \vdash \sim \forall x Qx.$$

5. Översätt följande till predikatlogiska sentenser:

a) Alla barn tycker om minst två maträtter.

b) Arne tycker inte om barn.

(Bx : x är barn; Mx : x är en maträtt; Txy : x tycker om y ; a : Arne.)

6. Visa att

$$R \text{ symmetrisk, } \exists x \forall y Ryx, R \text{ reflexiv } \not\models \forall x \forall y Rxy.$$

Vänd!

DEL 2

7. Visa med naturlig deduktion

$$\exists x \forall y (Ryx \rightarrow x = y), \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx) \vdash \exists x \forall y (Rxy \rightarrow x = y).$$

8. Hitta en *modell* för

$$\{A \rightarrow \exists x Fx, \forall x (\exists y Rxy \rightarrow \sim Fx), \sim \forall x \exists y Rxy \rightarrow A\}.$$

Det vill säga, hitta en tolkning som gör alla dessa sentenser sanna.

9. Visa med naturlig deduktion i modallogik att

$$\Box A, \Diamond(A \rightarrow (B \vee \Diamond C)) \vdash_{S5} \Diamond(B \vee C).$$

10. Visa att i intuitionistisk logik gäller

$$\sim A \rightarrow B \not\vdash_I A \vee B.$$

11. Visa (med resonemang) att $\forall x 0 + x = x + 0$ följer från Peanos axiom.

Ledning: Använd P3 flera gånger i induktionssteget.

DEL 3

12. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation mellan sentenser (i vanlig predikatlogik) som definieras av att $\mathcal{R}pq$ betyder att $p, q \models \perp$. Avgör om $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

13. Visa att i modal logik gäller

$$\exists x \exists y \Diamond Rxy, \exists x \Diamond \exists y Rxy \not\vdash_{S5} \Diamond \exists x \exists y Rxy.$$

14. Visa att i intuitionistisk logik gäller

$$\sim \forall x Fx \not\vdash_I \exists x \sim Fx.$$

15. Låt Γ vara en icke-tom mängd sentenser i vanlig predikatlogik, och q någon sentens i vanlig predikatlogik. Antag att $\Gamma \models \sim q$. Visa att det finns ett ändligt antal sentenser $p_1, p_2, \dots, p_n$ i mängden Γ sådana att

$$q, p_1, p_2, \dots, p_n \models \perp.$$

16. Låt p och q vara två satslogiska sentenser. Visa följande samband mellan klassisk och intuitionistisk logik, utan att använda fullständighets- och sundhetssatsen:

$$\text{Om } p \models_I q \text{ så } p \models q.$$

Ledning 1: Minns att $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$ gäller i klassisk logik och därmed att motsvarande ekvivalens även gäller språkligt.

Ledning 2: Om vi har en klassisk tolkning $\mathcal{I}$ och utifrån den skapar en intuitionistisk tolkning $\mathcal{I}_I$ som bara består av ett enda tillstånd, α , och som uppfyller att α garanterar precis de atomära sentenser som tilldelas sanningsvärdet 1 i tolkningen $\mathcal{I}$, så gäller för varje satslogisk sentens r att $\alpha \models_I r$ i tolkningen $\mathcal{I}_I$ om och endast om r görs sann i tolkningen $\mathcal{I}$. Denna observation får användas utan vidare bevis.

Lycka till!