Kortfattade lösningar till KS3, SF1646

Version 1 & 2

1. Vi parametriserar kurvan enligt $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, från $t = 0$ till $t = \pi$. Derivering ger

$$d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t)dt.$$

vilket i sin tur ger

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi (\pm \sin t, \mp \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt \\ &= \int_0^\pi (\mp \sin^2 t \mp \cos^2 t)dt = \mp \int_0^\pi dt = \mp\pi.\end{aligned}$$

För ena versionen gäller "uppe" tecknen och den andra "nere" tecknen.

2. Vi beräknar (med andra bokstäver)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^z \int_y^{z+y} a dx dy dz &= a \int_0^1 \int_0^z (z + y - y) dy dz \\ &= a \int_0^1 z^2 dz = \frac{a}{3}.\end{aligned}$$

där a=2 eller 4.

3. Parametrisering $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$. Derivering ger

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_x(x, y) &= (1, 0, -2x) \\ \mathbf{r}'_y(x, y) &= (0, 1, -2y)\end{aligned}$$

Sedan blir

$$\begin{aligned}dS &= \left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| dxdy = |(2x, 2y, 1)|\, dxdy = \\ &= \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy.\end{aligned}$$

Arean är

$$\int\int_Y dS = \int\int_{x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

vilket i polära koordinater blir

$$\begin{aligned}\int\int_Y dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\phi = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{12}\right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{24}.\end{aligned}$$