

# F10: Optimering. Iterationsmetoder.

1 oktober 2008

**EXEMPEL:** Bestäm största och minsta värdet på andragradspolynomet  $f(x) = x^2 + 4x + 7$  över alla reella  $x$ . Kvadratkomplettering.

**EXEMPEL:** Bestäm längd och bredd på den rektangel med given omkrets som har störst area. Geometriskt-aritmetiskt medelvärde.

**EXEMPEL:** Beräkna största och minsta värde till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2 + 2 \arctan x$$

på intervallet  $x \geq 1/\sqrt{3}$ .

**EXEMPEL:** Vilken cylindrisk konservburk har minst area givet att volymen är fixerad?

**EXEMPEL:** Visa att

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Man betraktar

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6},$$

och vill visa att  $f(x) > 0$  på intervallet.

**FIXPUNKTSPROBLEM:** Många ekvationer är det svårt eller närmast omöjligt att bestämma lösningarna till exakt. Ofta får man nöja sig med approximativa metoder. Anta t ex att vår ekvation är

$$x = F(x).$$

Detta kallas en **fixpunktsekvation**. Man kan försöka lösa den genom att gissa ett  $x_0$  och sedan sätta

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

**SATS 1.** Om  $I$  är ett intervall och  $F$  avbildar intervallet in i sig självt, och dessutom är strikt kontraherande (kontraktiv):

$$|F'(x)| \leq c, \quad x \in I,$$

för något tal  $c$  med  $c < 1$ , så har ekvationen exakt en rot  $\alpha$  på  $I$ , och  $x_n \rightarrow \alpha$  då  $n \rightarrow +\infty$ .

# Newton-Ralphsons metod

Vi vill nu lösa en ekvation av typen

$$f(x) = 0.$$

Idén är att skriva om problemet på fixpunktsform. Börja med en punkt  $x_0$ . Beräkna tangenten till  $f$  i punkten, och finn den punkt där tangenten har värdet noll. Denna punkt kallas  $x_1$ , och så fortsätter vi iterativt. Om vi skriver

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

är receptet

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

Om  $\alpha$  är roten och  $f$  har kontinuerliga derivator av ordning upp till 2 nära  $\alpha$ , och dessutom  $f'(\alpha) \neq 0$ , så kommer Newton-Ralphsons metod att konvergera så länge som gissningen  $x_0$  är tillräckligt bra.

**PROBLEM:** Visa att

$$\arctan x = \ln(1 + x)$$

har precis en positiv rot och ange en rekursionsmetod för numerisk beräkning av roten.